Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Janko Latschev
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik II für Studierende der Physik: Blatt 5 zur Abgabe am 15.5.2019 (in den Übungen).

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden symmetrischen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$, bestehend aus Eigenvektoren von A. Sei S die Matrix mit diesen Eigenvektoren als Spalten. Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass $S^{\mathrm{T}}AS$ eine Diagonalmatrix mit den von Ihnen gefundenen Eigenwerten ist.

Hinweis: Zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren: Betrachten Sie die Zeilensummen und die alternierenden Zeilensummen der Matrix.

Anmerkung: Trägheitstensoren von starren Körpern werden durch symmetrische Matrizen mit nur positiven Eigenwerten beschrieben.

Aufgabe 2: (3+1 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum der reellen Polynome $\mathbb{R}[X]$ und die beiden Abbildungen $\|\cdot\|_i : \mathbb{R}[X] \to [0,\infty)$, $i \in \{1,2\}$, gegeben durch

$$\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\|_1 = \max_{k\in\mathbb{N}}\{|a_k|\} \quad \text{und} \quad \|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\|_2 = \max_{k\in\mathbb{N}}\{(k+1)|a_k|\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf $\mathbb{R}[X]$ definieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ nicht äquivalent sind.

Aufgabe 3: (1+1+0,5+1,5 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen K des jeweiligen metrischen Raumes (X,d) sind kompakt?

(a) Sei (X,d) ein beliebiger metrischer Raum, und $K = \{a\} \cup \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a ist.

Im folgenden sei der betrachtete metrische Raum (X,d) immer $\mathbb{R}^2$ mit der Standardmetrik.

(b) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 < 1\}$,

(c) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq 1\}$,

(d) $K_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$, für eine beliebige *stetige* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (4+1 Punkte)
Betrachten Sie den reellen Vektorraum der beschränkten Funktionen

$$B([0,1], \mathbb{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid \exists\, C > 0 : f([0,1]) \subseteq [-C, C]\}$$

mit der Supremumsnorm

$$\| f \|_\infty = \sup\left\{ |f(x)| \,\middle|\, x \in [0,1] \right\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $(B([0,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ ein Banachraum ist, indem Sie überprüfen, dass die Axiome einer Norm erfüllt sind, und dann die Vollständigkeit beweisen.

Hinweis: Modifizieren Sie für den Beweis der Vollständigkeit den Beweis aus der Vorlesung für die analoge Aussage über stetige Funktionen.

(b) Beweisen Sie, dass $(B([0,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ kein Hilbertraum ist.

Aufgabe 5: (0 Punkte)
Betrachten Sie $\mathbb{R}^4$ zusammen mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie die symmetrische Bilinearform β gegeben durch

$$\beta(u, v) := \langle u, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} v \rangle, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^4$$

Bestimmen Sie die Normalform im Sinne des Trägheitssatzes von Sylvester, d.h. bestimmen Sie die Zahlen r_+, r_- und r_0 und eine orthogonale Basis bezüglich der die darstellende Matrix diese Normalform hat (aber keine zugehörige Basis).
Hinweis: Um einen der Eigenwerte zu finden, beachten Sie, dass die Zeilensummen der Matrix gleich sind.