Universität Hamburg Sommer 2017
Janko Latschev

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 8

Präsenzaufgaben

(P17) Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) Ist $\gamma : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve mit nirgends verschwindendem Tangentialvektor, so existiert ein Diffeomorphismus $\rho : [a,b] \to [a,b]$ so dass die Kurve $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \rho$ konstante Geschwindigkeit hat.

b) Die Aussage bleibt wahr, wenn γ nur stückweise glatt ist, wobei in den endlich vielen Unstetigkeitspunkten von $\dot{\gamma}$ die rechts- und linksseitigen Grenzwerte existieren und von Null verschieden sind.

Sei nun $\gamma : [0,1] \to M$ eine stetige Kurve, deren Einschränkung auf $[0, \frac{1}{2}]$ und auf $[\frac{1}{2}, 1]$ jeweils Geodätische sind, die Vektoren

$$v := \lim_{t \nearrow \frac{1}{2}} \dot{\gamma}(t) \quad \text{und} \quad w := \lim_{t \searrow \frac{1}{2}} \dot{\gamma}(t)$$

in $T_{\gamma(\frac{1}{2})}M$ jedoch nicht positive Vielfache voneinander sind (d.h. γ hat einen "Knick" bei $t = \frac{1}{2}$).

c) Zeigen Sie, dass in dieser Situation γ nicht kürzeste Verbindung zwischen seinen Endpunkten ist, indem Sie ein Vektorfeld $V \in \Gamma_\gamma(TM)$ entlang γ angeben, für dass

$$dE_\gamma(V) < 0$$

gilt.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 22.6., in der Vorlesung

(A24) Sei $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ eine Isometrie zwischen pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten, d.h. ein Diffeomorphismus mit $\varphi^* h = g$. Zeigen Sie:

a) Für die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇^g und ∇^h auf M bzw. N und Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt
$$\varphi_*(\nabla^g_X Y) = \nabla^h_{\varphi_* X}(\varphi_* Y).$$

b) $\gamma : (a, b) \to M$ ist genau dann eine Geodätische in (M, g), falls $\varphi \circ \gamma$ eine Geodätische in (N, h) ist.

c) Sei $(N, h) = (M, g)$ und sei $F \subset M$ die Fixpunktmenge der Isometrie $\varphi : (M, g) \to (M, g)$. Ist die Geodätische $\gamma : (a, b) \to M$in einem Punkt $p = \gamma(t_0) \in F$ tangential an F, d.h. gilt $\dot\gamma(t_0) \in T_pF \subset T_pM$, so liegt das Bild von γ vollständig in F.

d) Geben Sie verschiedene Beispiele für Flächen im $\mathbb{R}^3$, für die sie mit solchen Symmetrieargumenten die Bilder von (zumindest gewissen) Geodätischen ohne Rechnung finden können.

(A25) In Aufgabe **(A23)** auf Blatt 7 haben Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs einer Riemannschen Metrik h auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt. Wir identifizieren im folgenden $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und schreiben $z = x + \mathbf{i}y$, so dass die Metrik h auf $T_z\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ die Form
$$h_z(v, w) = \frac{1}{(\mathrm{Im}(z))^2}\mathrm{Re}(v\overline{w})$$
annimmt.

a) Zeigen Sie, dass die Kurve $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{H}$, definiert als $\gamma(t) = \mathbf{i}e^t$, eine Geodätische für die Metrik h ist.

b) In der Funktionentheorie zeigt man, dass durch
$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
eine Gruppenwirkung von $SL(2, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ definiert wird, d.h. für alle $A \in SL(2, \mathbb{R})$ bildet φ_A den Raum $\mathbb{H}$ bijektiv auf sich selbst ab, und es gilt $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$. Zeigen Sie, dass diese Wirkung isometrisch ist, d.h. dass $\varphi_A^* h = h$ für alle $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

c) Zeigen Sie, dass die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ transitiv auf $\mathbb{H}$ wirkt, d.h. zu $z, w \in \mathbb{H}$ existiert ein $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $\varphi_A(z) = w$.

d) Bestimmen Sie die Untergruppe in $SL(2, \mathbb{R})$ derjenigen Abbildungen, welche $\mathbf{i} \in \mathbb{H}$ fixieren, und zeigen Sie, dass die zugehörigen Differentiale transitiv auf den Einheitsvektoren im Tangentialraum $T_{\mathbf{i}}\mathbb{H}$ wirken.

e) Folgern Sie aus **b)** und **c)**, dass $SL(2, \mathbb{R})$ auch transitiv auf dem Einheitstangentialbündel $T^1\mathbb{H} := \{v \in T\mathbb{H} \mid h(v, v) = 1\}$ wirkt, und dass die Exponentialabbildung in jedem Punkt $z \in \mathbb{H}$ auf dem ganzen Tangentialraum $T_z\mathbb{H}$ definiert ist!

f) Wie sehen die Bilder der Geodätischen der Metrik h aus?