Universität Hamburg
Janko Latschev Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 6

Präsenzaufgaben

(P13) Verifizieren Sie, dass die Krümmung

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[x,y]} Z$$

einer kovarianten Ableitung ∇ auf TM ein $(3,1)$-Tensorfeld ist.

(P14) Wie wir bereits gesehen haben, existiert für eine Liegruppe G der Dimension n linksinvariante Vektorfelder $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$, deren Werte in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums $T_g G$ bilden. Insbesondere hat dann *jedes* Vektorfeld $Y \in \Gamma(TG)$ auf G die Form

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$$

für geeignete Funktionen $\alpha_j : G \to \mathbb{R}$. Wir definieren nun eine kovariante Ableitung ∇ auf TG durch

$$\nabla_X (\sum_j \alpha_j Z_j) := \sum_j (X\alpha_j) Z_j.$$

a) Überprüfen Sie, dass dies tatsächlich eine kovariante Ableitung auf TG definiert. Hängt ∇ von der Wahl der Vektorfelder Z_j ab?

b) Welche Vektorfelder auf G sind parallel bezüglich ∇?

c) Bestimmen Sie Torsion und Krümmung von ∇.
Hinweis: Da T und R Tensorfelder sind, können Sie sich die Rechnung hier durch geeignete Wahlen sehr einfach machen.

d) Können Sie ∇ so verändern, dass die neue kovariante Ableitung $\widetilde{\nabla}$ verschwindende Torsion hat? Wie sieht der Krümmungstensor $\widetilde{R}$ dieser modifizierten kovarianten Ableitung aus?

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Mo, 29.5., in der Übung

(A19) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ∇ eine kovariante Ableitung auf TM.

a) Drücken Sie in lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ die Komponenten T_{ij}^k und R_{ijk}^ℓ in den Ausdrücken

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_\ell R_{ijk}^\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

für Torsion und Krümmung von ∇ mit Hilfe der Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k aus.

b) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k (bezüglich der Standardkoordinaten) des in der Vorlesung definierten kanonischen Zusammenhangs ∇ auf $T\mathbb{R}^n$, der durch

$$\nabla_X \left(\sum \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) := \sum (X\beta_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

definiert ist.

(A20) Im Raum $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ der komplexen 2×2-Matrizen betrachten wir den *reellen* Unterraum $\mathbb{H}$, welcher von den vier Matrizen

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

a) $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ ist ein Unterring, in dem jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist.

b) Unter der Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}$, $(x_1, \ldots, x_4) \mapsto x_1\mathbb{1} + x_2 I + x_3 J + x_4 K$ wird die Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ bijektiv auf die Untergruppe

$$SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = \mathbb{1}, \det A = 1\} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$$

abgebildet.
Auf diese Weise erhält S^3 die Struktur einer Liegruppe.

c) Zeigen Sie, dass die Matrizen I, J und K eine Basis der Liealgebra $\mathfrak{su}(2) = T_{\mathbb{1}}SU(2)$ von $SU(2)$ bilden.

d) Wir bezeichnen mit

$$X_A := AI, \quad Y_A = AJ \quad \text{und} \quad Z_A = AK$$

die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder. Bestimmen Sie die Lieklammern $[X, Y]$, $[Y, Z]$ und $[Z, X]$.

e) Sei ∇ die linksinvariante kovariante Ableitung auf $SU(2)$, wie sie für allgemeine Liegruppen in Aufgabe **(P14)** betrachtet wurde, und sei $\widetilde{\nabla}$ die modifizierte kovariante Ableitung wie in Teil **d)** dieser Aufgabe. Bestimmen Sie die folgenden Werte des Krümmungstensors von $\widetilde{\nabla}$:

$$\widetilde{R}(X, Y)X, \quad \widetilde{R}(X, Y)Y \quad \text{und} \quad \widetilde{R}(X, Y)Z.$$