Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2017

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 3

Präsenzaufgaben

(P6) Sei $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte (Potential-)Funktion. Wir definieren die Hamiltonsche Funktion $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (kinetische plus potentielle Energie) durch

$$H(x, y) := \frac{1}{2}|y|^2 + V(x).$$

a) Zeigen Sie, dass $c \in \mathbb{R}$ genau dann ein regulärer Wert von H ist, wenn es ein regulärer Wert von V ist!

b) Sei nun $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von H. Zeigen Sie, dass für $(x, y) \in M := H^{-1}(c)$ der Tangentialraum durch

$$T_{(x,y)}M = \{(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ \langle y, w\rangle + dV_x(v) = 0\}$$

gegeben ist, wobei $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet!

(P7) Ein lokaler Diffeomorphismus ist eine glatte Abbildung $F : M \to N$, so dass jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$ besitzt, welche unter F diffeomorph auf ihr Bild $F(U) \subseteq N$ abgebildet wird.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein lokaler Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass dann f ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $f(\mathbb{R})$ ist.

b) Geben Sie ein explizites Beispiel eines lokalen Diffeomorphimus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der nicht global injektiv ist.

(P8) Bestimmen Sie die Übergangsabbildung zwischen den beiden Trivialisierungen von TS^2 über $U_\pm = S^2 \setminus \{\pm(0, 0, 1)\}$, die durch die stereographische Projektionen $\sigma_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^2$ induziert sind.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 27.4., in der Vorlesung

(A7) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ betrachten wir die Abbildung $f_\alpha : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, gegeben als

$$f_\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos \alpha t, \sin \alpha t).$$

Zeigen Sie, dass f_α eine injektive Immersion ist. Ist f_α eine Einbettung?

(A8) Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $F : M \to N$ eine injektive Immersion von M in eine glatte Mannigfaltigkeit N. Zeigen Sie:

a) F ist eine Einbettung.

b) Falls $\dim M = \dim N$ und N zusammenhängend ist, so ist F sogar ein Diffeomorphismus.

(A9) Sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, und sei $S \subset N$ eine Untermanngifaltigkeit. Wir nennen F *transvers zu* S falls für jeden Punkt $p \in M$ mit $f(p) \in S$ die Bedingung

$$F_{*,p}(T_pM) + T_{F(p)}S = T_{F(p)}N$$

erfüllt ist.

a) Beweisen Sie: Ist F transvers zu S, so ist $F^{-1}(S) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim M + \dim S - \dim N$.

b) In $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ist die Teilmenge

$$S := \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \mid x^2 - y^2 + u^3 - 3uv^2 = 0, 2xy + 3u^2v - v^3 = 0\}$$

eine 2-dimensionale Untermanngifaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Inklusion $I : S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ transverse zu S ist.

Bemerkung: Mit der Identifikation $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ lässt sich S als

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \mid z_1^2 + z_2^3 = 0\}$$

schreiben.

Das Urbild $K := I^{-1}(S) \subset S^3$ ist diffeomorph zu S^1, aber die Einbettung $K \hookrightarrow S^3$ lässt sich nicht zur Standardeinbettung deformieren. Man nennt den Knoten $K \subset S^3$ Kleeblattschlinge.

(A10) Wir betrachten Bündelmorphismen $\Phi : E \to F$ zwischen Vektorbündeln $\pi_E : E \to M$ und $\pi_F : F \to M$ über der Identität $f = \mathrm{id}_M : M \to M$.

a) Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von M, so dass E und F über diesen Mengen trivialisiert sind, d.h. wir haben Trivialsierungen $\varphi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ und $\psi_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^\ell$. Zeigen Sie: Jeder Bündelmorphismus $\Phi : E \to F$ über der Identität wird dann beschrieben durch Abbildungen $\lambda_\alpha : U_\alpha \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ mit $\alpha \in I$, so dass

$$\forall\, \alpha, \beta \in I : \quad \psi_{\alpha\beta}\lambda_\beta = \lambda_\alpha\varphi_{\alpha\beta}.$$

b) Sei $E \to S^1$ das Bündel aus der Vorlesung, dessen Totalraum das Möbiusband ist. Beschreiben Sie einen injektiven Bündelmorphismus $E \to \underline{\mathbb{R}}^2$ von E in das triviale Bündel vom Rang 2.

c)* Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel TS^2 isomorph zum Bündel $E_2 \to S^2$ aus der Vorlesung ist.