Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P22) Zeigen Sie, dass die holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

(wobei $\sqrt{\cdot}$ den Hauptzweig der Quadratwurzel bezeichnet) injektiv ist, und beschreiben Sie die Bildmenge!

(P23) Wir betrachten die Tangensfunktion $\tan : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0\} \to \mathbb{C}$,

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Tangens auf dem Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\}$ injektiv ist, und beschreiben Sie die Bildmenge $B \subset \mathbb{C}$!
Hinweis: Schreiben Sie $\tan$ *als Verknüpfung einer geeigneten Exponentialfunktion mit einer gebrochen rationalen Funktion, und betrachten Sie diese einzeln!*

b) Geben Sie eine explizite Formel für die Umkehrfunktion arctan auf B an!

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Umkehrfunktion arctan im Punkt $z_0 = 0$, und finden Sie deren Konvergenzradius!
Hinweis: Finden Sie dafür zunächst eine Formel für die Ableitung $\arctan'(z)$*!*

(P24) Beweisen Sie das *Minimumprinzip*: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, so dass das Minimum der Funktion $|f| : G \to \mathbb{R}$ in G angenommen wird, so besitzt f eine Nullstelle in G.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 7.6. in der Vorlesung.

(H26) Finden Sie zur Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos(z)$ eine explizite Formel für eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Umgebungen von $0 \in \mathbb{C}$, so dass für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in U$ gilt:

$$f(z) = f(0) + (\varphi(z))^n.$$

(H27) Finden Sie jeweils biholomorphe Abbildungen zwischen

a) dem Sektor $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$ und der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}$,

b) dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ und dem ersten Quadranten $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$,

c) der halben Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{D} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und der Kreisscheibe $\mathbb{D}$, sowie

d)* der doppelt geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ und der Kreisscheibe $\mathbb{D}$!

(H28) Finden Sie alle Singularitäten der folgenden Funktionen und bestimmen Sie für die *isolierten* Singularitäten jeweils den Typ (und bei Polstellen die Ordnung):

a) $\dfrac{e^z - 1}{z^n}$, für festes $n \in \mathbb{N}$

b) $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$

c) $\tan\left(\dfrac{1}{z}\right)$

d) $\dfrac{1}{\cos(z)^2}$

(H29) **a)** Die Funktionen f und g seien auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph, mit jeweils einer Polstelle der Ordnung k bzw. ℓ in z_0. Was können Sie über die Vielfachheit der Polstelle z_0 der Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sagen?

b) Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer nicht hebbaren Singularität in z_0. Welchen Typ hat dann die Singularität z_0 für $\sin \circ f$?

(H30) Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von L'Hospital für holomorphe Funktionen!