Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P19) Sei $G \subset \mathbb{C}$ eine Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie

a) Ist $K \subset G$ kompakt, so besitzt f in K nur endlich viele Nullstellen.

b) f hat in G nur abzählbar viele Nullstellen.

(P20) Bestimmen Sie den Konvergenzradius sowie die ersten 6 Koeffizienten der Taylorreihe von $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ in $z_0 = 0$.

(P21) Bestimmen Sie die Ordnungen der Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(z) = z^p \cdot \sin(z^q)$, für $p, q \in \mathbb{N}$.

b) $g(z) = 1 - \cos^2(z^3)$.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 31.5. in der Vorlesung.

(H22) Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

der Funktion $Q(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ im Punkt $z_0 = 0$ aus der Vorlesung besitzt den Konvergenzradius 2π (die B_n sind die Bernoullizahlen).

b) Die Bernoullizahlen erfüllen für jedes $n > 0$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

c) Alle Bernoullizahlen sind rational und für $k \geq 1$ gilt $B_{2k+1} = 0$.

(d)* Für $k \geq 1$ gilt $\operatorname{sgn}(B_{2k}) = (-1)^{k+1}$.

(H23) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ in Null die Taylorreihe

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots$$

besitzt, und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe!

(H24) Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist f eine ganze Funktion, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ gilt, so folgt $f(z) = z$.

b) Ist $f : B(0,2) \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$.

c) Es existiert keine holomorphe Funktion $f : B(0,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, welche $f(z)^2 = z$ erfüllt.

Muss eine ganze Funktion f mit $f(n) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit der Funktion $z \mapsto z^2$ übereinstimmen? Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

(H25) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}(U)$ der auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen eine $\mathbb{C}$-Algebra bildet. Beweisen Sie außerdem, dass diese Algebra genau dann nullteilerfrei ist, falls U ein Gebiet ist.[1]

[1] Falls Sie die Begriffe $\mathbb{C}$-*Algebra* oder *nullteilerfrei* nicht kennen, so schlagen Sie diese in einem Algebra-Lehrbuch nach.