Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P15) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie die *Cauchy-Abschätzungen*: Ist $B(z,r) \subset U$ und ist $M > 0$ eine Konstante, so dass für alle $w \in B(z,r)$ die Abschätzung $|f(w)| \le M$ gilt, so folgt

$$|f^{(m)}(z)| \le M \frac{m!}{r^m}.$$

Bemerkung: Eine geeignete Konstante $M > 0$ existiert zum Beispiel immer dann, wenn $\overline{B(z_0,r)} \subset U$ (warum?).

(P16) Zeigen Sie, dass für eine auf einem funktionentheoretisch einfach zusammenhängenden Gebiet definierte holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ohne Nullstellen zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine $n$te Wurzel existiert, d.h. eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ mit $h^n = f$.

(P17) **a)** Gibt es ein Gebiet um Null, in dem die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{n^2}$$

eine holomorphe Funktion definiert?

b) In welchem Gebiet um Null wird durch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{2^n}$$

eine holomorphe Funktion definiert?

(P18) Zeigen Sie, dass jedes Paar ganzer Funktionen f und g, welche die Gleichung

$$f^2 + g^2 = 1$$

erfüllen, von der Form $f(z) = \cos(h(z))$ und $g(z) = \sin(h(z))$ für eine geeignete ganze Funktion h sein muss!

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 24.5. in der Vorlesung.

(H18) Geben Sie eine (eventuell stückweise) stetig differenzierbare geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}$ an, so dass das Komplement des Bildes genau 4 Komponenten besitzt, auf denen die Umlaufzahl die Werte -1, 0, 2 und 3 annimmt!

(H19) **a)** Zeigen Sie: Sind G_1 und G_2 Gebiete in $\mathbb{C}$, welche funktionentheoretisch einfach zusammenhängend sind, und ist $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend, so ist auch $G_1 \cup G_2$ funktionentheoretisch einfach zusammenhängend.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Behauptung nicht gelten muss, wenn $G_1 \cap G_2$ nicht zusammenhängend ist.

c) Geben Sie Beispiele von funktionentheoretisch einfach zusamenhängenden Gebieten, die nicht sternförmig sind!

(H20) Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\binom{z}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{z}{n} := \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie die binomische Formel in Reihenform, d.h. beweisen Sie, dass für $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+w)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} w^n. \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius der Binomialreihe

$$b_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} w^n.$$

(c)* Was können Sie über das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises sagen?

(H21) Sei $P(z)$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$ mit Nullstellen $z_1, \ldots, z_d$ (mehrfache Nullstellen sind erlaubt, d.h. die z_k müssen nicht paarweise verschieden sein).

a) Beweisen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\overline{z - z_k}}{|z - z_k|^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass jede Nullstelle von P' in der konvexen Hülle der z_k liegt, d.h. von der Form $w = \sum_k \lambda_k z_k$ mit $\lambda_k \in [0,1]$ und $\sum_k \lambda_k = 1$ ist.

Hinweis: Die beiden Aufgabenteile sind auch unabhängig lösbar.