Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P7) Sind folgende Aussagen für jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und jede glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ wahr?

a) $\operatorname{Re}\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) = \int_\gamma \operatorname{Re}(f(z))\,dz.$

b) Aus $f \neq 0$ auf γ folgt $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0.$

(P8) Beweisen Sie, dass eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in U$ eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,T] \to U$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(T) = z_1$ existiert.

(P9) Wir bezeichnen mit

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz$$

das Kurvenintegral von f entlang des Weges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + Re^{2\pi \mathbf{i} t}$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)(z-3)}\,dz$

b) $\displaystyle\int_{|z-2\mathbf{i}|=2} \frac{1}{z^2+\pi^2}\,dz$

(P10) Für $0 < r \neq 1$ definieren wir

$$I(r) := \int_{|z|=r} \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}\,dz.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $I(2) = -2\pi^2\mathbf{i}$.

b) $I(3) = -3\pi^2\mathbf{i}$.

c) $I(\frac{1}{2}) = 0$.

d) $I'(r) = 0$ für alle $0 < r \neq 1$.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 3.5. in der Vorlesung.

(H9) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere offene Menge. Zeigen Sie, dass $f(z) = \overline{z}$ auf U keine Stammfunktion besitzt, und zwar

a) mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen.

b) mit Hilfe von Satz 1 aus Kapitel 2 der Vorlesung.

(H10) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, dz$$

für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

a) $\gamma(t) = 2 + e^{2\pi \mathbf{i} t}$. **b)** $\gamma(t) = 2 + 3e^{2\pi \mathbf{i} t}$. **c)** $\gamma(t) = 2 + 5e^{2\pi \mathbf{i} t}$.

(H11) Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{\mathbf{i}t}$, das Integral $\int_\gamma z^{-1} \left(z + z^{-1}\right)^{2n} dz$.

b) Folgern Sie aus dem Resultat von **a)**, dass $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x)\, dx = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

(H12) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z) - 1| < 1$ für alle $z \in U$. Zeigen Sie, dass für jede glatte geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ gilt:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0.$$

(H13)* Beweisen Sie

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx,$$

indem Sie die Funktion $f(z) = e^{\mathbf{i}z^2}$ über den Rand des Kreissektors

$$K := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \le R, 0 \le \arg(z) \le \frac{\pi}{4}\}$$

integrieren und den Grenzwert für $R \to \infty$ betrachten.
Sie dürfen dabei $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ als bekannt voraussetzen.