Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Präsenzaufgaben für die Übung

(P4) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert als

$$f(z) := \begin{cases} (z\bar{z}^{-1})^2 & z \neq 0 \\ 1 & z = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f die Cauchy-Riemann-Gleichungen im Punkt $z_0 = 0$ erfüllt, aber in z_0 nicht komplex differenzierbar ist. Warum widerspricht das der in der Vorlesung entwickelten Theorie nicht?

(P5) Entscheiden Sie, in welchen Punkten die angegebenen Funktionen komplex differenzierbar sind:

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + \mathbf{i}y) = x^3y^2 + \mathbf{i}x^2y^3$

b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(x + \mathbf{i}y) = \cos^2(x + y) + \mathbf{i}\sin^2(x + y)$

(P6) Berechnen Sie die Integrale der angegebenen Funktionen über die jeweils angegebenen Kurven $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$!

a) $f(z) = (z - z_0)^n$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ entlang $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi\mathbf{i}t}$ für $r > 0$

b) $f(z) = e^z$ entlang $\gamma(t) = 3e^{\pi\mathbf{i}t}$

c) $f(z) = \bar{z}$ entlang $\gamma(t) = \frac{1}{t+1} + 2\mathbf{i}t$

d) $f(z) = \cos(\mathrm{Re}(z))$ entlang $\gamma(t) = \mathbf{i} + e^{2\pi\mathbf{i}t}$

e) $f(z) = \sin(z)$ entlang $\gamma(t) = t + \mathbf{i}t$

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 26.4. in der Vorlesung.

(H5) **a)** Diskutieren Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{C}$, in welchen Punkten die Funktion $f(x + \mathbf{i}y) = ax + by$ komplex differenzierbar ist!

b) Beschreiben Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von der Form $f(x+\mathbf{i}y) = u(x) + \mathbf{i}v(y)$ mit $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

(H6) **a)** Bestimmen Sie für die Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, gegeben als

$$u(x + \mathbf{i}y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$$

alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $u + \mathbf{i}v$ holomorph ist!

b) Beweisen Sie, dass jede harmonische Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ Realteil einer holomorphen Funktion $f = u + \mathbf{i}v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist!

(H7) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f^* : U^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in U\} \to \mathbb{C}$, $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ebenfalls holomorph ist, und bestimmen Sie die Ableitung von f^* in $z \in U^*$!

b) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass U zusammenhängend sei. Beweisen Sie: Nimmt f nur reelle oder nur imaginäre Werte an, so ist f konstant!

(H8) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, welche durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

gegeben ist.

a) f ist in seinem Definitionsbereich holomorph. In welchen Punkten verschwindet die Ableitung von f?

b) Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ injektiv ist! Was ist das Bild?

c) Zeigen Sie, dass auch die Einschränkung von f auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ injektiv ist!

d) Beschreiben Sie das Bild eines Kreises $K_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ in Abhängigkeit von $r > 0$!

e) Beschreiben Sie das Bild eines Strahls $S_\varphi := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{\mathbf{i}\varphi} \text{ mit } r > 0\}$ in Abhängigkeit von $\varphi \in [0, 2\pi)$!