Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 12

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P39) **a)** Finden Sie eine Möbiustransformation, die den ersten Quadranten $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$ auf die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe $D^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$ abbildet.

b) Gibt es eine Möbiustransformation, die den Einheitskreis auf sich selbst abbildet und den Kreis um 0 vom Radius $\frac{1}{2}$ auf den Kreis um $\frac{1}{4}$ vom Radius $\frac{1}{4}$ abbildet?

c) Zu welchem Kreisring $K(0; r, 1)$ ist das Gebiet $G = B(0,2) \setminus \overline{B(\frac{5}{8}, \frac{7}{8})}$ biholomorph?

(P40) Finden Sie die Abbildungen aus dem Riemannschen Abbildungssatz für folgende Gebiete G_j, welche z_j auf 0 abbilden und in diesem Punkt positive Ableitung haben:

a) $G_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ und $z_1 = 1$.

b) $G_2 := Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$, und $z_2 = \frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$.

c) $G_3 := D^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$ und $z_3 = (\sqrt{2} - 1)\mathbf{i}$.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 12.7. in der Vorlesung.

(H49) Seien $f : \mathbb{D} \to G$ und $g : \mathbb{D} \to G$ zwei holomorphe Abbildungen von der Einheitskreisscheibe in das Gebiet G mit $f(0) = g(0)$. Beweisen Sie: Ist f injektiv mit $f(\mathbb{D}) = G$, so gilt $g(B(0,r)) \subset f(B(0,r))$ für alle $0 < r \leq 1$.

(H50) Wir nennen zwei Möbiustransformationen φ_1 und φ_2 *zueinander konjugiert*, falls es eine weitere Möbiustransformation ψ gibt, so dass

$$\varphi_2 \circ \psi = \psi \circ \varphi_1.$$

Zeigen Sie:

a) Jede Möbiustransformation $\varphi \neq \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$ besitzt entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte in $\overline{\mathbb{C}}$.

b) Hat die Möbiustransformation φ genau einen Fixpunkt, so ist φ konjugiert zu $z \mapsto z + 1$.

c) Hat die Möbiustransformation φ genau zwei Fixpunkte, so ist φ konjugiert zu $z \mapsto \alpha z$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Inwiefern bestimmt φ die Konstante α?

(H51) Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\varphi : G \to \mathbb{D}$ eine biholomorphe Abbildung.

a) Zeigen Sie: Ist z_n eine Folge in G mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w \in \mathbb{C} \setminus G$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(z_n)| = 1$.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass in der Situation von Teil **a)** die Folge der Bildpunkte $\varphi(z_n)$ nicht unbedingt konvergieren muss.

(H52) Beweisen Sie die folgende Formel für den hyperbolischen Abstand zweier Punkte $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$: Sind $a, b \in S^1$ die Schnittpunkte mit S^1 des eindeutigen (verallgemeinerten) Kreises durch z_0 und z_1, welcher senkrecht auf S^1 steht, so gilt

$$d_h(z_0, z_1) = |\log(\mathrm{DV}(a, z_0, b, z_1))|.$$

(H53) Wieviele verschiedene Werte kann das Doppelverhältnis annehmen, wenn man stets die gleichen vier Punkte in verschiedenen Reihenfolgen betrachtet?