Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 11

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P35) Für eine meromorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definiert man das *Residuum in Unendlich* als

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|z|=R} f(z)\, dz,$$

wobei R so groß gewählt werden muss, dass der Ball $B(0, R)$ alle Polstellen von f in $\mathbb{C}$ (alle *endlichen* Polstellen) enthält.

a) Können Sie erklären, warum in der Definition ein negatives Vorzeichen auftritt?

b) Zeigen Sie

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right).$$

c) Bestimmen Sie die Residuen von $f(z) = \frac{1}{z}$ und $g(z) = z^2$ in Unendlich.

d) Zeigen Sie, dass die Summe *aller* Residuen einer meromorphen Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ verschwindet.

(P36) In der Vorlesung wurden ganze Funktionen, welche in Unendlich eine Polstelle haben, als *ganz rationale Funktionen* bezeichnet. Gibt es für solche Funktionen bereits einen einfacheren Namen?

(P37) Beweisen Sie die in der Vorlesung gemachte Behauptung, dass zu drei paarweise verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ genau ein verallgemeinerter Kreis existiert, welcher alle drei Punkte enthält.

(P38) **a)** Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation genau dann die obere Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ biholomorph auf sich selbst abbildet, wenn die darstellende Matrix reell gewählt werden kann.
Diese Untergruppe von $\operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$ *bezeichnet man mit* $PSL(2, \mathbb{R})$. *Wir werden sehen, dass alle Automorphismen von* $\mathbb{H}$ *Einschränkungen von Möbiustransformationen sind, so dass* $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) \cong PSL(2, \mathbb{R})$ *gilt.*

b) Welche dieser Automorphismen von $\mathbb{H}$ fixieren den Punkt $\mathbf{i} \in \mathbb{H}$?

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 5.7. in der Vorlesung.

(H45) **a)** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Beweisen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U\backslash$ holomorph, so ist f auf ganz U holomorph.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die relevanten Aussagen aus Kapitel 2.

b) (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bezüglich $\mathbb{R}$, d.h. $z \in U$ genau dann, wenn $\overline{z} \in U$. Wir setzen $U_+ := U \cap \mathbb{H} = \{z \in U \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $U_\mathbb{R} := U \cap \mathbb{R}$. Beweisen Sie:
Ist $f : U_+ \cup U_\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und auf U_+ holomorph und gilt $f(U_\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, so existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $f = \widetilde{f}|_{U_+ \cup U_\mathbb{R}}$.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe (H7) von Blatt 2.

c) Sei $Q \subset \mathbb{C}$ der offene erste Quadrant, d.h.

$$Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Bestimmen Sie alle Automorphismen von Q, welche sich stetig auf den Rand

$$\partial Q = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \mathbf{i}\mathbb{R}_{\geq 0}$$

fortsetzen. Können Sie einen Automorphismus von Q angeben, der keine solche Fortsetzung besitzt?

(H46) Beweisen Sie:

a) Jede Möbiustransformation lässt sich als Verknüpfung von Abbildungen der folgenden drei Formen schreiben (wobei $b \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}^*$ freie Konstanten sind):
$T_b(z) = z + b, \quad S_a(z) = az$, und $I(z) = \frac{1}{z}$.

b) Jede Möbiustransformation bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.
Hinweis: Eine einheitliche algebraische Beschreibung verallgemeinerter Kreise haben wir in Aufgabe **(H4)** *auf Blatt 1 gegeben.*

(H47) Sei $\tau \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\operatorname{Im} \tau > 0$, d.h. $\tau \in \mathbb{H}$, und sei $\Lambda_\tau \subset \mathbb{C}$ die additive Untergruppe

$$\Lambda_\tau := \{z = m + n\tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie, dass die Quotientengruppe $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ die Struktur einer 1-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit trägt.
Bemerkung: Diese komplexen Mannigfaltigkeiten nennt man elliptische Kurven.

Siehe nächstes Blatt!

(H48) Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der folgenden Aussage:
Ist $U \subset \mathbb{C}$ funktionentheoretisch einfach zusammenhängend, so ist das Komplement $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ von U in $\overline{\mathbb{C}}$ zusammenhängend.
Sei dazu $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, so dass $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ nicht zusammenhängend ist. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine nichtleere kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ und eine abgeschlossene Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ mit $A \cap B = \varnothing$ und $A \cup B = \mathbb{C} \setminus U$.

b) Sind A und B wie in Teil **a)** beide nicht leer, so gilt $\delta := \inf \{|a - b| \,:\, a \in A, b \in B\} > 0$.

c) Zu jedem $a \in A$ existiert eine geschlossene Kurve γ in U, so dass die Umlaufzahl $w(\gamma, a) = 1$ ist.
Hinweis: Konstruieren Sie γ als Rand einer geeigneten Überdeckung von A durch hinreichend kleine abgeschlossene Quadrate, von denen genau eines den Punkt a in seinem Inneren enthält.