Universität Hamburg
Janko Latschev
Immanuel Stampfli

Sommer 2016

Funktionentheorie

Übungsblatt 10

Präsenzaufgabenvorschläge für die Übung

(P32) In der Vorlesung wurde behauptet, dass für Polynome p und q mit $\deg p \leq \deg q - 2$, wobei q auf $[0,\infty)$ keine Nullstellen hat, und für einen *beliebigen* Zweig des komplexen Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)} \log(x)\, dx = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}(\log(z))^2, a\right) - \pi \mathbf{i} \int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$$

gilt. Verschiedene Zweige des komplexen Logarithmus unterscheiden sich allerdings um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathbf{i}$, so dass die Formel je nach Wahl des Zweiges verschiedene Aussagen zu liefern scheint. Muss die Behauptung also korrigiert werden, oder was geht hier vor?

(P33) **a)** Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(z) = z^n$ in der Scheibe $\mathbb{D}$!

b) Wieviele Nullstellen hat

$$f(z) = z^7 - 8z^5 + 15z^2 - z + 1$$

in $B(0,1)$ und in $B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$?

(P34) Beweisen Sie mindestens zwei der folgenden Aussagen:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6} = \frac{\pi}{6}$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos(x)}{x^2+ax+b} = \left(\sin\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\cos\left(\frac{a}{2}\right)\right)\pi e^{-\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}$, falls $b > \frac{a^2}{4}$.

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+a^2} = \frac{\pi\log(a)}{2a}$, falls $a > 0$.

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2} = -\frac{\pi}{4}$.

Bitte wenden!

Schriftliche Hausaufgaben: Abgabe am 28.6. in der Vorlesung.

(H40) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zahl mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$. Zeigen Sie:

a) Die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ hat genau eine Lösung in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

b) Ist λ reell, so ist auch die Lösung reell.

(H41) Beweisen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $n \geq N$ alle Nullstellen von

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n}$$

in $B(0, \epsilon)$ liegen!

(H42) **a)** Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von Rouché für meromorphe Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$!

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{1}{z^3} - 15z^2 + 7$ in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$!

(H43) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{\mathbb{H}}$, und sei $g : U \to \mathbb{C}$ meromorph mit endlich vielen Polstellen in $\mathbb{H}$ und genau einer Polstelle $a \in \mathbb{R}$, welche von erster Ordnung ist. Wir nehmen außerdem an, dass $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ (dies gilt zum Beispiel, falls $g(z)$ eine rationale Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$ mit $\deg p < \deg q$ ist). Wir setzen $f(z) := g(z)e^{\mathbf{i}z}$.
Beweisen Sie:

a) $\displaystyle\lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = -\pi\mathbf{i}\,\mathrm{Res}(f, a)$, wobei der Weg $\gamma_\rho : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{\mathbf{i}(\pi - t)}$ beschrieben ist.

b) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \pi\mathbf{i}\,\mathrm{Res}(f, a) + 2\pi\mathbf{i} \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}(f, z).$$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$

Siehe nächstes Blatt!

(H44) **a)** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstellen. Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (h(z))^n$, falls für alle geschlossenen Kurven γ in G die Windungszahl $w(f \circ \gamma, 0)$ durch n teilbar ist. Eine solche Funktion h nennt man *n-te Wurzel von f*.
Ansatz: Wählen Sie $z_0 \in G$ und beschreiben Sie h als

$$h(z) = c \exp\left(\frac{1}{n} \int_{z_0}^{z} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\right)$$

für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{C}^*$, wobei die Integration entlang einem beliebigen Weg von z_0 nach z in G stattfindet.

b) Was ist die kleinste kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, so dass $f(z) = z^2 - 1$ auf $\mathbb{C} \setminus A$ eine Quadratwurzel besitzt?