

FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 9

- (2 Punkte)* Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine rationale Funktion der Form $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit $\deg P \leq \deg Q - 2$. Zeigen Sie, dass die Summe aller Residuen von f verschwindet!
- (2 Punkte)* Die Funktion $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph und für $z_0 \in \mathcal{O}$ gelte $\varphi'(z_0) \neq 0$. Die Funktion g habe in $w_0 = \varphi(z_0)$ einen Pol erster Ordnung. Beschreiben Sie die Beziehung zwischen $\text{Res}(g \circ \varphi, z_0)$ und $\text{Res}(g, w_0)$!
- (2+3+3 Punkte)* Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^z}{z^5} dz$

b) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2(x)}$.

- (2 Punkte)* Beweisen Sie: Ist $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv und holomorph und ist $0 < \varrho < r$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(B(z_0, \varrho)) \rightarrow B(z_0, \varrho)$ durch die Formel

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$$

gegeben.