

FUNKTIONENTHEORIE

Übungsblatt 8

1. (2+2 Punkte) Sei $P(z)$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$ mit Nullstellen z_1, \dots, z_d (mehrfache Nullstellen sind erlaubt, d.h. die z_k müssen nicht paarweise verschieden sein).

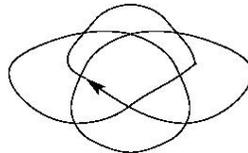
a) Beweisen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^d \frac{1}{z - z_k}.$$

b) Zeigen Sie, dass jede Nullstelle von P' in der konvexen Hülle der z_k liegt, d.h. von der Form $w = \sum_k \lambda_k z_k$ mit $\lambda_k \in [0, 1]$ und $\sum_k \lambda_k = 1$ ist.

2. (2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Umlaufzahlen $w(\gamma, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im } \gamma$, wobei γ die folgende Kurve sei:



b) Finden Sie eine geschlossene Kurve γ in \mathbb{C} , deren Komplement genau 4 Komponenten besitzt, auf denen die Umlaufzahl die Werte 0, -1, 2 und 3 annimmt.

3. (2+1+3 Punkte) Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, so dass $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{O}$ nicht zusammenhängend ist. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine nichtleere kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ und eine abgeschlossene Teilmenge $B \subset \mathbb{C}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{C} \setminus \mathcal{O}$.

b) Sind A und B wie in Teil a) beide nicht leer, so gilt $\delta := \inf \{|a - b| : a \in A, b \in B\} > 0$.

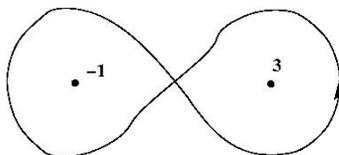
c) Zu $a \in A$ existiert eine geschlossene Kurve γ in \mathcal{O} , so dass die Windungszahl $w(\gamma, a) = 1$ ist.

Hinweis: Konstruieren Sie γ als Rand einer geeigneten Überdeckung von A durch hinreichend kleine abgeschlossene Quadrate, von denen genau eines den Punkt a in seinem Inneren enthält.

Bitte wenden!

4. (2+2 Punkte) Bestimmen Sie die Werte folgender Integrale:

a) $\int_{\gamma_1} \frac{z^4 + z^2 + 2}{(z-3)(z+1)} dz$, mit γ_1 von folgender Form:



b) $\int_{\gamma_2} \frac{e^z \cos(\pi z)}{z^2 - z} dz$, mit γ_2 von folgender Form:

