Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

1. *(2 Punkte)* Beweisen Sie sorgfältig: Sind f und g auf dem Kreisring $K(z_0; r, R)$ holomorph mit Laurententwicklungen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{und} \qquad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

so hat die Funktion $h := f \cdot g$ die Laurententwicklung

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

2. *(4+2 Punkte)* Sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Beweisen Sie die Laurententwicklung

$$\exp\left(\frac{\lambda}{2}(z + z^{-1})\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$$

auf $K(0; 0, \infty)$, wobei für alle $n \geq 0$ die Koeffizienten durch

$$a_n = a_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\lambda \cos(t)} \cos(nt)\, dt$$

gegeben sind!

b) Geben Sie alternativ auch Reihendarstellungen für die a_n an! Wie vereinfachen sich diese für $\lambda = 2$?

3. *(3 Punkte)* Beweisen Sie den Satz über die Gebietstreue für meromorphe Abbildungen auf Teilmengen der Riemannschen Zahlenkugel: Ist $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und ist $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph und nicht konstant, so ist $f(\Omega) \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet.

4. *(3 Punkte)* Kann eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $\lim\limits_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$ gleichzeitig bei allen ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ Pole haben?