Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

Funktionentheorie

Übungsblatt 11

1. *(1+2 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subsetneq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{D}$ eine biholomorphe Abbildung.

a) Ist z_n eine Folge in $\mathcal{O}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w \in \partial\mathcal{O}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(z_n)| = 1$.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass in der Situation von Teil **a)** die Folge der Bildpunkte $\varphi(z_n)$ nicht konvergent sein muss.

2. *(1+3 Punkte)*

a) Beweisen Sie: Ist $Q := \{z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ und ist $\varphi : Q \to \mathbb{D}$ die uniformisierende Abbildung aus dem Riemannschen Abbildungssatz zu $z_0 = 0$, so gilt $\varphi(\mathbf{i}z) = \mathbf{i}\varphi(z)$.

b) Lässt sich die Aussage aus Teil **a)** auf andere Elementargebiete mit Rotationssymmetrie verallgemeinern?

3. *(Zusatz, 0 Punkte)* Beweisen Sie die Existenz einer surjektiven holomorphen Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{D}$ mit nirgends verschwindender Ableitung!

4. *(1+2+3 Punkte)* Ein unendliches Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ heißt *konvergent*, falls höchstens endlich viele Faktoren gleich Null sind und die Folge $\widetilde{P}_n := \prod_{k\le n, p_k \ne 0} p_k$ gegen eine von Null verschiedene komplexe Zahl konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$ (eventuell gegen 0) und wir definieren

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k$$

Das Produkt heißt *absolut konvergent*, falls

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ |p_k - 1| < 1}}^{\infty} |\log(p_k)| < \infty,$$

wobei log den Hauptzweig des Logarithmus auf $B(1,1)$ bezeichnet. Beweisen Sie:

Bitte wenden!

a) Konvergiert das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$, so konvergiert die Folge p_k gegen 1.

b) Konvergiert das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ absolut, so konvergiert es, und der Grenzwert ist unabhängig von der Reihenfolge der p_k.

c) Ist $\{z_k\}_{k\geq 1}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$, so gilt: Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ konvergiert genau dann (absolut), wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ (absolut) konvergiert.

5. *(2+2 Punkte)* Beweisen Sie:

a) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^{2n}\right) = \frac{1}{1-z}$ für $|z|<1$.

b) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$