Der Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik

Lisa Friedl

6. März 2024

Korrektheit und Vollständigkeit

- Das Ziel ist der Beweis der Äquivalenz zwischen den beiden Relationen $\vdash$ und $\vDash$.

Korrekheit

Lemma 1.1 (Korrekheit)

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Beweis

Bekannt: $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow$ es gibt eine Ableitung $\mathcal{D}$, bei der alle Hypothesen in Γ sind.

z.z.: Für jede Ableitung $\mathcal{D}$ mit Konklusion φ und Hypothesen in Γ gilt $\Gamma \vDash \varphi$.

Wie verwenden Induktion über $\mathcal{D}$.

Beweis

(IA) $\mathcal{D}$ besteht aus einem Element, $\varphi \in \Gamma$

$\Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$

($\wedge$ I) IH: $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}$ und $\begin{matrix}\mathcal{D}'\\ \varphi'\end{matrix}$ sind Ableitungen und für alle Γ bzw. Γ', welche die Hypothesen von $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{D}'$ enthält, gilt $\Gamma \vDash \varphi$ bzw. $\Gamma' \vDash \varphi'$.

Enthalte Γ'' $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} & \mathcal{D}'\\ \varphi & \varphi'\end{matrix}}{\varphi \wedge \varphi'}$.

Setze $\Gamma = \mathcal{D}$ und $\Gamma' = \mathcal{D}'$, dann gilt $\Gamma \cup \Gamma' \subseteq \Gamma''$.

Aus IH folgt $\Gamma'' \vDash \varphi$ und $\Gamma'' \vDash \varphi'$. Sei $[\![\psi]\!]_v = 1 \; \forall \psi \in \Gamma''$, dann gilt

$[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi']\!]_v = 1$, $[\![\varphi \wedge \varphi']\!]_v = 1$

$\Rightarrow \Gamma'' \vDash \varphi \wedge \varphi'$

Beweis

($\wedge$ E) IH: Für alle Γ, die die Hypothesen von $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}$ enthalten, gilt $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$.

Enthalte Γ' $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}$ und $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi}$.

Damit ist auch $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}$ enthalten.

Laut IH gilt dann $\Gamma' \vDash \varphi \wedge \psi$, also $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = 1$

$\Rightarrow [\![\varphi]\!]_v = 1$ und $[\![\psi]\!]_v = 1$

$\Rightarrow \Gamma' \vDash \varphi$ und $\Gamma' \vDash \psi$

Beweis

($\to$ I) IH: Für alle Γ, die die Hypothesen von $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$ enthalten, gilt $\Gamma \vDash \psi$.

Enthalte Γ' $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}$.

Dann enthält $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ $\begin{array}{c}\varphi\\ \mathcal{D}\\ \psi\end{array}$.

Wenn also $[\![\varphi]\!] = 1$ und $[\![\sigma]\!] = 1 \; \forall \sigma \in \Gamma'$ gilt, dann gilt $[\![\psi]\!] = 1$. Mit der Wahrheitstafel von "$\to$" folgt $[\![\varphi \to \psi]\!] = 1$, wenn alle Aussagen in Γ' den Wert 1 haben.
$\Rightarrow \Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

Beweis

$(\rightarrow E)$ IH: $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}$ und $\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}$ sind Ableitungen und für alle Γ bzw. Γ', welches die Hypothesen von $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{D}'$ enthält, gilt $\Gamma \models \varphi$ bzw. $\Gamma' \models \varphi \rightarrow \psi$.

Enthalte Γ'' $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}$, dann gilt $\Gamma \cup \Gamma' \subseteq \Gamma''$.
Mit IH erhalten wir $\Gamma'' \models \varphi$ und $\Gamma'' \models \varphi \rightarrow \psi$, d.h. $[\![\varphi]\!] = 1$ und $[\![\varphi \rightarrow \psi]\!] = 1$. Mit Wahrheitstafel von "$\rightarrow$"folgt $[\![\psi]\!] = 1$.
$\Rightarrow \Gamma'' \models \psi$.

Beweis

($\perp$) IH: Für alle Γ, die die Hypothesen von $\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}$ enthalten, gilt $\Gamma \vDash \perp$.

Da $[\![\perp]\!] = 0$ für alle Bewertungen, existiert keine Bewertung mit $[\![\psi]\!] = 1\ \forall \psi \in \Gamma$.

Enthalte Γ' $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\varphi}$.
Ann.: $\Gamma' \nvDash \varphi$
$\Rightarrow [\![\psi]\!] = 1\ \forall \psi \in \Gamma'$ und $[\![\varphi]\!] = 0$ für manche Bewertungen.

Widerspruch: Γ' enthält alle Hypothesen von $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{\varphi}$.
$\Rightarrow \Gamma' \vDash \varphi$

Beweis

(RAA) IH: Für alle Γ, die die Hypothesen von $\begin{matrix}\neg\varphi \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{matrix}$ enthalten, gilt $\Gamma \models \perp$.

Enthalte Γ' $\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{matrix}}{\varphi}$

Ann.: $\Gamma' \not\models \varphi$.

Dann existiert eine Bewertung mit $[\![\psi]\!] = 1 \ \forall \psi \in \Gamma'$ und $[\![\varphi]\!] = 0$ bzw. $[\![\neg\varphi]\!] = 1$.

Aber $\Gamma'' = \Gamma' \cup \{\neg\varphi\}$ enthält $\begin{matrix}\neg\varphi \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{matrix}$ und es gilt $[\![\psi]\!] = 1 \ \forall \psi \in \Gamma''$, was nicht möglich ist, da $\Gamma'' \models \perp$.

$\Rightarrow \Gamma' \models \varphi$

Widerspruchsfreiheit

Definition 1.2

Eine Menge Γ von Aussagen ist:

(i) widerspruchsfrei, wenn $\Gamma \nvdash \bot$ gilt.

(ii) nicht widerspruchsfrei, wenn $\Gamma \vdash \bot$ gilt.

Widerspruchsfreiheit

Lemma 1.3

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) Γ ist widerspruchsfrei,
(ii) Für kein φ gilt $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$,
(iii) Es gibt mindestens ein φ, sodass $\Gamma \nvdash \varphi$

Beweis

Wir beweisen die Äquivalenzen:

(i) Γ ist nicht widerspruchsfrei,
(ii) Es existiert ein φ, so dass $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$ gilt,
(iii) Es gilt $\Gamma \vdash \varphi$ für alle φ

Beweis

(i)⇒(iii) Sei $\Gamma \vdash \bot$

$$\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{\varphi}(\bot)$$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ (gilt für alle } \varphi).$$

(iii)⇒(ii) Trivial

(ii)⇒(i) Sei $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Bekannt: $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \to \bot)$

$$\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \to \bot\end{array}}{\bot}(\to E)$$

Widerspruchsfreiheit

Lemma 1.4

Falls es eine Bewertung gibt, sodass $[\![\psi]\!]_v = 1$ für alle $\psi \in \Gamma$ gilt, dann ist Γ widerspruchsfrei.

Beweis.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass $\Gamma \vdash \perp$, und mit Lemma 1.1 folgern wir $\Gamma \vDash \perp$. Für alle Bewertungen v gilt dann also $[\![\perp]\!]_v = 1$, was aber nicht möglich ist, da für alle Bewertungen $[\![\perp]\!]_v = 0$ sein muss. Es existiert also keine Bewertung mit $[\![\psi]\!]_v = 1$ für alle $\psi \in \Gamma$ und Γ ist widerspruchsfrei $\square$

Beispiele für widerspruchsfreie Mengen

- $\{p_0, \neg p_1, p_1 \to p_2\}$ ist widerspruchsfrei, mit einer Bewertung, die $[\![p_0]\!] = 1$ und $[\![p_1]\!] = 0$ erfüllt.
- $\{p_0, p_1, \ldots\}$ ist widerspruchsfrei, mit der konstanten 1 Bewertung.
- $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\varphi\}$ ist nicht widerspruchsfrei (Lemma 1.3).

Widerspruchsfreiheit

Lemma 1.5

(a) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ist nicht widerspruchsfrei $\implies \Gamma \vdash \varphi$,
(b) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ist nicht widerspruchsfrei $\implies \Gamma \vdash \neg\varphi$.

Beweis.

$$(a) \quad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi] \\ \mathcal{D} \\ \bot\end{matrix}}{\varphi} RAA \qquad\qquad (b) \quad \dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \mathcal{D}' \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi} \to I$$

$\square$

Maximale Widerspruchsfreiheit

Definition 1.6

Eine Menge Γ ist maximal widerspruchsfrei genau dann, wenn gilt:
(a) Γ ist widerspruchsfrei,
(b) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und Γ' widerspruchsfrei $\implies \Gamma = \Gamma'$.

Beispiel für maximal widerspruchsfreie Menge

$\Gamma = \{\varphi \mid [\![\varphi]\!]_v = 1\}$ für eine feste Bewertung v.

- Widerspruchsfrei: Lemma 1.4
- $\Gamma = \Gamma'$: Sei Γ' eine widerspruchsfreie Menge mit $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
  Sei $\psi \in \Gamma'$ und $[\![\psi]\!] = 0$
  $\Rightarrow [\![\neg\psi]\!] = 1$ und somit $\neg\psi \in \Gamma'$
  Da aber $\Gamma \subseteq \Gamma'$ folgt, dass Γ' nicht widerspruchsfrei
  (Widerspruch) $\Rightarrow [\![\psi]\!] = 1$ für alle $\psi \in \Gamma'$ und $\Gamma = \Gamma'$

Maximale Widerspruchsfreiheit

Lemma 1.7

Jede widerspruchsfreie Menge Γ ist in einer maximal widerspruchsfreien Menge Γ^* enthalten.

Beweis

Sei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Aufzählung aller Aussagen.
Wir definieren eine nicht-abnehmende Folge von Mengen Γ_i

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ wenn } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei} \\ \Gamma_n \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\Gamma^* = \bigcup \{\Gamma_n \mid n \geq 0\} (\text{maximal widerspruchsfrei})$$

Beweis

- Γ ist widerspruchsfrei für alle n (folgt direkt aus Induktion über n)

- Γ^* ist widerspruchsfrei:
  Angenommen $\Gamma^* \vdash \perp$, dann existiert per Definition eine Ableitung $\mathcal{D}$ von $\perp$ mit Hypothesen in Γ^*.
  Wir nennen diese Hypothesen $\psi_0, \ldots, \psi_k$.
  Da $\Gamma^* = \bigcup\{\Gamma_n \mid n \geq 0\}$ gilt, erhalten wir für jedes $i \leq k$ und ein n_i ein $\psi_i \in \Gamma_{n_i}$.
  Setze $n = max\{n_i \mid i \leq k\}$, dann $\psi_0, \ldots, \psi_k \in \Gamma_n$ und $\Gamma_n \vdash \perp$ (Widerspruch).

Beweis

- Γ^* ist maximal widerspruchsfrei:
  Sei $\Gamma^* \subseteq \Delta$, Δ widerspruchsfrei.
  Wenn $\psi \in \Delta$, dann gilt $\psi = \varphi_m$ für irgendein $m \geq 0$.
  Da $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$, ist $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$ widerspruchsfrei.
  Also $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$, d.h. $\varphi_m \in \Gamma_m \subseteq \Gamma^*$.
  $\Rightarrow \Gamma^* = \Delta$

Eigenschaften maximaler Widerspruchsfreiheit

Lemma 1.8

Wenn Γ maximal widerspruchsfrei ist, dann ist Γ unter Ableitbarkeit abgeschlossen (also: $\Gamma \vdash \varphi \implies \varphi \in \Gamma$).

Beweis.

Sei $\Gamma \vdash \varphi$ und angenommen $\varphi \notin \Gamma$. Dann ist $\Gamma \cup \{\varphi\}$ nicht widerspruchsfrei. Also folgt $\Gamma \vdash \neg\varphi$, also ist Γ nicht widerspruchsfrei. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Eigenschaften maximaler Widerspruchsfreiheit

Lemma 1.9

Sei Γ maximal widerspruchsfrei. Dann:
(a) für alle φ ist entweder $\varphi \in \Gamma$ oder $\neg\varphi \in \Gamma$,
(b) für alle φ, ψ gilt: $\varphi \longrightarrow \psi \in \Gamma \iff (\varphi \in \Gamma \implies \psi \in \Gamma)$.

Beweis

(a) Wir wissen: Γ widerspruchsfrei $\Rightarrow \varphi \notin \Gamma$ oder $\neg\varphi \notin \Gamma$

Sei $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$

Fall 1: Γ' nicht widerspruchsfrei $\Rightarrow \neg\varphi \in \Gamma$
(Lemma 1.8, Lemma 1.5).

Fall 2: Γ' widerspruchsfrei $\Rightarrow \varphi \in \Gamma$,
da Γ maximal ist.

Beweis

(b) ($\Rightarrow$) Sei $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$, z.z.: $\psi \in \Gamma$.
Mit Lemma 1.8 folgt

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

$\Rightarrow \psi \in \Gamma$

($\Leftarrow$) Es gelte $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$.
Fall 1: Falls $\varphi \in \Gamma$ gilt $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.
Fall 2: Falls $\neg\varphi \in \Gamma$ gilt $\Gamma \vdash \neg\varphi$ und $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Eigenschaften maximaler Widerspruchsfreiheit

Wir erhalten automatisch:

Korollar 1.10

Wenn Γ maximal widerspruchsfrei ist, dann gilt:
(a) $\varphi \in \Gamma \iff \neg\varphi \notin \Gamma$
(b) $\neg\varphi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma$.

Eigenschaften maximaler Widerspruchsfreiheit

Lemma 1.11

Wenn Γ widerspruchsfrei ist, existiert eine Bewertung, sodass $[\![\psi]\!] = 1$ für alle $\psi \in \Gamma$ gilt.

Beweis

Wir wissen Γ ist Teilmenge einer maximal widerspruchsfreien Menge Γ^* (Lemma 1.7)

Wir definieren $v(p_i) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } p_i \in \Gamma^* \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$.

Und erweitern v zu der Bewertung $[\![\,]\!]_v$.

Beweis

IH: $[\![\varphi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma^*$. Wir verwenden nun Induktion über φ:

- Gilt für atomare φ per Definition.
- Sei $\varphi = \psi \wedge \sigma$:
  Für $\psi, \sigma \in \Gamma^*$ gilt $[\![\varphi]\!]_v = 1 \Leftrightarrow [\![\psi]\!]_v = [\![\sigma]\!]_v = 1 \Leftrightarrow$ (IH)
  $\Rightarrow \varphi \in \Gamma^*$
  Umgekehrt $\psi \wedge \sigma \in \Gamma^* \Leftrightarrow \psi, \sigma \in \Gamma^*$ (Lemma 1.8)
  Rest folgt direkt aus der IH.
- Sei $\varphi = \psi \rightarrow \sigma$:
  $[\![\psi \rightarrow \sigma]\!]_v = 0 \Leftrightarrow [\![\psi]\!]_v = 1$ und $[\![\sigma]\!]_v = 0 \Leftrightarrow$ (IH),
  $\psi \in \Gamma^*$ und $\sigma \notin \Gamma^* \Leftrightarrow \psi \rightarrow \sigma \notin \Gamma^*$ (Lemma 1.9)

Da $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ gilt $[\![\psi]\!]_v = 1$ für alle $\psi \in \Gamma$.

Korollar 1.12

$\Gamma \nvdash \varphi$ genau dann, wenn es eine Bewertung gibt, sodass $[\![\psi]\!] = 1$ für alle $\psi \in \Gamma$ und $[\![\varphi]\!] = 0$.

Beweis.

$\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei $\iff$ es gibt eine Bewertung, sodass $[\![\psi]\!] = 1$ für alle $\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ oder $[\![\psi]\!] = 1$ für alle $\psi \in \Gamma$ und $[\![\varphi]\!] = 0$. $\square$

Vollständigkeitssatz

Theorem 1.13 (Vollständigkeitssatz)

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$

Beweis.

($\Leftarrow$) $\Gamma \nvdash \varphi \implies \Gamma \nvDash \varphi$ (Lemma 1.12)
($\Rightarrow$) folgt aus Lemma 1.1. $\square$

Der Vollständigkeitssatz erlaubt es uns also, das Finden von Ableitungen durch das Überprüfen von Tautologien zu ersetzen.

Vollständigkeit

Definition 1.14

Eine Menge Γ heißt vollständig, wenn für alle φ entweder $\Gamma \vdash \varphi$ oder $\Gamma \vdash \neg\varphi$ gilt.
$Cons(\Gamma) = \{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$ bezeichnet die Menge der Konsequenzen von Γ.

Folgerung: $Cons(\Gamma)$ ist maximal widerspruchsfrei, genau dann wenn Γ eine vollständige Menge ist.

Danke für eure Aufmerksamkeit

Quellen: Dirk van Dalen, Logic and Structure (4th edition), Springer-Verlag