Boolesche Algebren

Marie Feddersen

07.03.2024

Gliederung

Einführung und Motivation

Definition 1

Eine Algebra vom Typ *Bool* ist eine Algebra $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$, die aus einer Menge A einer zweielementigen Funktion $+$, einer einelementigen Funktion $-$ und einer nullelementigen (oder konstanten) Funktion 0 besteht.

Wir verwenden die Symbole $\cdot$ und 1 als Kurzschreibweise, sodass für $a, b \in A$ gilt $a \cdot b := -(-a + -b)$ sowie $1 := -0$.

Aussagenalgebra

Φ bezeichne eine Menge von (Aussagen-)Variablen.

Form(Φ) bezeichne die Menge all jener Aussagen, die durch Verknüpfung (mit $\neg, \vee$) der Variablen aus Φ entstehen.

Definition 2

Wir definieren die Algebra $\mathfrak{Form}(\Phi) := (\mathit{Form}(\Phi), +, -, 0)$ durch

$$\phi + \psi := \phi \vee \psi \quad \forall \phi, \psi \in \mathit{Form}(\Phi)$$

$$-\phi := \neg\phi \quad \forall \phi \in \mathit{Form}(\Phi)$$

$$0 := \perp$$

$1 = -0 \qquad \phi \cdot \psi = -(-\phi + -\psi)$

Beachte: $\top := \neg \perp$ und $\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathit{Form}(\Phi)$

Wahrheitsalgebra

Definition 3

Die Wahrheitsalgebra $\mathbf{2} := (\{0,1\}, +, -, 0)$ ist auf der Menge der Wahrheitswerte $\{0,1\}$ definiert durch

$$a + b := max(a,b) \quad \forall a, b \in \{0,1\}$$

$$-a := 1 - a \quad \forall a \in \{0,1\}$$

Theorem 4

Seien ϕ und ψ Aussagen. Es gelten folgende Äquivalenzen:

$$\text{(a)}\quad \vDash_{\mathrm{C}} \phi \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \mathbf{2} \vDash \phi \approx \top$$

$$\text{(b)}\quad \mathbf{2} \vDash \phi \approx \psi \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \vDash_{\mathrm{C}} \phi \leftrightarrow \psi$$

$$\text{(c)}\quad \vDash_{\mathrm{C}} \phi \leftrightarrow (\phi \leftrightarrow \top)$$

Definition 5

Sei $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$ eine Algebra vom *Bool*-Typ und sei $\theta : \Phi \to A$ eine beliebige Abbildung.

Wir erweitern die Abbildung θ auf eine Abbildung $\tilde{\theta} : Form(\Phi) \to \mathfrak{A}$ durch:

$$\tilde{\theta}(p) := \theta(p) \quad \forall p \in \Phi$$

$$\tilde{\theta}(\perp) := 0$$

$$\tilde{\theta}(\neg\phi) := -\tilde{\theta}(\phi) \quad \forall \phi \in Form(\Phi)$$

$$\tilde{\theta}(\phi \vee \psi) := \tilde{\theta}(\phi) + \tilde{\theta}(\psi) \quad \forall \phi, \psi \in Form(\Phi)$$

Proposition 6

Sei $\theta : \Phi \to \{0, 1\}$ eine beliebige Abbildung. So ist die (soeben definierte) Abbildung $\tilde{\theta} : \mathfrak{Form}(\Phi) \to \mathbf{2}$ ein Homomorphismus von Algebren.

Beweis (von Proposition 6)

Zu zeigen sind die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \tilde{\theta}(\bot) = 0 \\
&\text{(ii)} \quad \tilde{\theta}(\neg\phi) = -(\tilde{\theta}(\phi)) \quad \forall \phi \in \mathfrak{Form}(\Phi) \\
&\text{(iii)} \quad \tilde{\theta}(\phi \vee \psi) = \tilde{\theta}(\phi) + \tilde{\theta}(\psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathfrak{Form}(\Phi)
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind (i), (ii) und (iii) bereits per Definition erfüllt.

□

Proposition 7

Sei $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$ eine Algebra vom *Bool*-Typ und sei $\theta : \Phi \to A$ eine beliebige Abbildung. Dann ist die Abbildung $\tilde{\theta} : \mathit{Form}(\Phi) \to \mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt.

Beweis (von Proposition 7)

Seien $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 : \mathfrak{Form}(\Phi) \to \mathfrak{A}$ zwei Abbildungen, die die Bedingungen aus der Definition erfüllen.

Folgende Gleichungen gelten bereits per Definition.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(p) &= \theta(p) = \tilde{\theta}_2(p) \quad \forall p \in \Phi \\ \tilde{\theta}_1(\perp) &= 0 = \tilde{\theta}_2(\perp) \end{aligned}$$

Seien nun $\phi, \psi \in Form(\Phi)$ mit $\tilde{\theta}_1(\phi) = \tilde{\theta}_2(\phi)$ und $\tilde{\theta}_1(\psi) = \tilde{\theta}_2(\psi)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(\neg\phi) &= -\tilde{\theta}_1(\phi) = -\tilde{\theta}_2(\phi) = \tilde{\theta}_2(\neg\phi) \\ \tilde{\theta}_1(\phi \vee \psi) &= \tilde{\theta}_1(\phi) + \tilde{\theta}_1(\psi) = \tilde{\theta}_2(\phi) + \tilde{\theta}_2(\psi) = \tilde{\theta}_2(\phi \vee \psi) \end{aligned}$$

Da jedes $\gamma \in Form(\Phi)$ als Verknüpfung von Elementen aus Φ durch $\vee, \neg$ und $\perp$ dargestellt werden kann, folgt $\tilde{\theta}_1 \equiv \tilde{\theta}_2$. $\square$

Definition 8

Sei $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$ eine Algebra vom Typ *Bool*.

Wir nennen die Gleichung $s \approx t$ für $s, t \in \mathit{Form}(\Phi)$ wahr in $\mathfrak{A}$,

wenn für alle Abbildungen $\theta : \Phi \to A$ gilt:

$$\tilde{\theta}(s) = \tilde{\theta}(t)$$

In diesem Fall notieren wir: $\mathfrak{A} \models s \approx t$.

Beweis (von Theorem 4) $\models_C \phi \iff 2 \models \phi \approx \top$

"$\Rightarrow$": Sei $\phi \in \mathfrak{Form}(\Phi)$ eine klassische Tautologie.

Dann gilt für jede Zuweisung $\theta : \Phi \to \{0, 1\}$, wobei wir 0 mit *falsch* und 1 mit *wahr* identifizieren:

$$\tilde{\theta}(\phi) = 1 = -0 = -\tilde{\theta}(\perp) = \tilde{\theta}(\neg \perp) = \tilde{\theta}(\top)$$

Das entspricht genau $\mathbf{2} \models \phi \approx \top$.

" $\Leftarrow$": Es gelte $\mathbf{2} \models \phi \approx \top$, also gilt für jede beliebige Abbildung $\theta : \Phi \to \{0, 1\}$: $\quad \tilde{\theta}(\phi) = \tilde{\theta}(\top) = 1$.

D.h. für jede mögliche Zuweisung von Wahrheitswerten an Aussagenvariablen ist ϕ wahr. Damit gilt $\models_{\mathrm{C}} \phi$.

Die zweite und dritte Aussage folgen ebenfalls direkt aus den Definitionen und sind v.a. der Vollständigkeit halber aufgeführt. $\square$

Mengenalgebren

Definition 9

Sei A eine beliebige Menge und $P(A)$ die Potenzmenge von A.

Die Potenzmengenalgebra von A: $\mathfrak{P}(A) = (P(A), +, -, 0)$

ist definiert durch:

$$C + D := C \cup D \quad \forall C, D \in P(A)$$

$$-C := C^{\complement} \quad \forall C \in P(A)$$

$$0 := \emptyset$$

Eine Mengenalgebra ist eine Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra, also eine Teilmenge P' von $P(A)$, die 0 enthält und abgeschlossen unter den Operationen $+$ und $-$ ist.

Mit $C \cap D = -(-C + -D) \quad \forall C, D \in P(A)$ und $1 := A = \emptyset^{\complement}$ ist P' ebenfalls abgeschlossen unter $\cap$ und enthält A.

Set bezeichnet die Menge aller Mengenalgebren.

Theorem 10

Sei ϕ eine Aussage, so gilt:

$$\vDash_{\mathrm{C}} \phi \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \mathrm{Set} \vDash \phi \approx \top$$

Proposition 11

Jede Potenzmengenalgebra ist isomorph zu einer Potenzalgebra von **2**.

Genauso ist jede Potenzalgebra von **2** isomorph zu einer Potenzmengenalgebra.

Definition 12

Sei $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$ eine Algebra vom Typ *Bool* und I eine Menge.

Die Potenzalgebra $\mathfrak{A}^{\mathrm{I}} := (\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{A}, +, -, 0)$, wobei $+, -, 0$ als die komponentenweise Anwendung der Verknüpfungen auf $\mathfrak{A}$ definiert sind.

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

Beweis (von Proposition 11)

"$\Rightarrow$": Sei A eine beliebige Menge. Definiere die Abbildung

$$\chi : \mathfrak{P}(A) \to \mathbf{2}^A, \quad \chi(C)_a := \begin{cases} 1 & a \in C \\ 0 & sonst \end{cases} \quad \text{für } C \in P(A), a \in A$$

Wir zeigen, dass χ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{P}(A)$ und $\mathbf{2}^A$ ist.

(i) Seien $C, D \in P(A)$, sodass $\chi(C) = \chi(D)$.

$$e \in C \quad \Leftrightarrow \quad \chi(C)_e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \chi(D)_e = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e \in D$$

Daraus folgt $C = D$ und daher die Injektivität von χ.

(ii) Sei $y \in \mathbf{2}^A$. Für $E := \{a \in A | y_a = 1\} \subseteq A$ gilt per Konstruktion $\chi(E) = y$, womit die Surjektivität von χ gezeigt ist.

Beweis (Fortsetzung)

(iii) Seien $a \in A$ und $C, D \in \mathfrak{P}(A)$.

a. $\chi(0)_a = \chi(\emptyset)_a = 0$

b. $\chi(-C)_a \;=\; \chi(C^{\complement})_a \;=\; \begin{cases} 1 & a \in C^{\complement} \\ 0 & sonst \end{cases}$

$$= \; 1 - \begin{cases} 1 & a \in C \\ 0 & sonst \end{cases} \;=\; \underbrace{1 - \chi(C)_a} \;=\; -\chi(C)_a$$

c. $\chi(C + D)_a \;=\; \chi(C \cup D)_a \;=\; \begin{cases} 1 & a \in C \vee a \in D \\ 0 & sonst \end{cases}$

$$= \; max(\chi(C)_a, \chi(D)_a) \;=\; \chi(C)_a + \chi(D)_a$$

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$": Sei I eine beliebige Menge und $\mathbf{2}^{\mathrm{I}}$ die entsprechende Potenzalgebra. Definiere die Abbildung:

$$\alpha : \mathbf{2}^{\mathrm{I}} \to P(\mathrm{I}), \quad f \mapsto \{i \in \mathrm{I} | f_i = 1\}.$$

(i) Seien $f, g \in \mathbf{2}^{\mathrm{I}}$ mit $\alpha(f) = \alpha(g)$.

$$\begin{aligned} & \{i \in \mathrm{I} \mid f_i = 1\} = \{i \in \mathrm{I} \mid g_i = 1\} \\ \Leftrightarrow \quad & ((f_i = 1 \Leftrightarrow g_i = 1) \text{ } \mathit{und} \text{ } (f_i = 0 \Leftrightarrow g_i = 0)) \\ \Leftrightarrow \quad & f = g \end{aligned}$$

(ii) Sei $\mathrm{I}' \in P(\mathrm{I})$. Definiere $f \in \mathbf{2}^{\mathrm{I}}$ komponentenweise durch

$$f_i = \begin{cases} 1 & i \in \mathrm{I}' \\ 0 & \mathit{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha(f) = \mathrm{I}'.$$

Beweis (Fortsetzung)

Seien $f, g \in \mathbf{2}^{\mathrm{I}}$.

a. $\alpha(0) \ = \ \{i \in \mathrm{I} | 0_i = 1\} \ = \ \emptyset$

b. $\alpha(-f) \ = \ \{i \in \mathrm{I} | (-f)_i = 1\} \ = \ \{i \in \mathrm{I} | f_i = 1 - 1 = 0\}$
$= \ \{i \in \mathrm{I} | f_i = 1\}^{\complement} \ = \ -\alpha(f)$

c. $\alpha(f + g) \ = \ \{i \in \mathrm{I} | (f + g)_i = 1\} \ = \ \{i \in \mathrm{I} | max(f_i, g_i) = 1\}$
$= \ \{i \in \mathrm{I} | f_i = 1\} \cup \{i \in \mathrm{I} | g_i = 1\} \ = \ \alpha(f) + \alpha(g)$

$\square$

Lemma 13

Seien $\phi \in Form(\Phi)$, I *eine beliebige Menge,* $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$, *und* $\mathfrak{B} = (B, +, -, 0)$ *zwei isomorphe Algebren, und* $\mathfrak{A}_{\mathrm{S}} \subseteq \mathfrak{A}$ *eine Unteralgebra von* $\mathfrak{A}$.

Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $\mathfrak{A} \models \phi \approx \top \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A}^{\mathrm{I}} \models \phi \approx \top$

(b) $\mathfrak{A} \models \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A}_{\mathrm{S}} \models \phi \approx \top$

(c) $\mathfrak{A} \models \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{B} \models \phi \approx \top$

Beweis (von Lemma 13)

a. "$\Rightarrow$": Seien die Voraussetzungen wie in der Behauptung angegeben.

Es gelte für alle $\theta : \Phi \to \mathfrak{A}$, dass $\tilde{\theta}(\phi) = \tilde{\theta}(\top)$.

Sei $\theta_{\mathrm{I}} : \Phi \to \mathfrak{A}^{\mathrm{I}}$ eine beliebige, feste Abbildung.

Wir finden eine Familie $(\theta_i)_{i\in\mathrm{I}}$ mit $\theta_i : \Phi \to \mathfrak{A}$, sodass gilt:

$$\theta_{\mathrm{I}}(p) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \theta_i(p) \quad \forall p \in \Phi$$

$$\tilde{\theta}_{\mathrm{I}} = \prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i$$

Es gelten die folgenden Gleichungen.

$$\prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(p) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \theta_i(p) = \theta_{\mathrm{I}}(p) \quad \forall p \in \Phi$$

$$\prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\bot) = \prod_{i\in\mathrm{I}} 0 = 0$$

Beweis (Fortsetzung)

$$\prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\neg\psi) = \prod_{i\in\mathrm{I}} -\tilde{\theta}_i(\psi) = -\prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\psi) \quad \forall \psi \in \mathfrak{Form}(\Phi)$$

$$\prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\psi_0 \vee \psi_1) = \prod_{i\in\mathrm{I}} (\tilde{\theta}_i(\psi_0) + \tilde{\theta}_i(\psi_1)) = (\prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\psi_0)) + (\prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\psi_1)) \quad \forall \psi_0, \psi_1 \in \mathfrak{Form}(\Phi)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von $\tilde{\theta}_\mathrm{I}$ nach Proposition 7 gilt

$$\boxed{\tilde{\theta}_\mathrm{I}(\psi) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\psi)} \quad \forall \psi \in \mathfrak{Form}(\Phi)$$

$\theta_i : \mathrm{Form}(\Phi) \to 2$

Per Annahme erhalten wir:

$$\tilde{\theta}_\mathrm{I}(\phi) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\phi) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \tilde{\theta}_i(\top) = \tilde{\theta}_\mathrm{I}(\top)$$

Beweis (Fortsetzung)

a. "$\Leftarrow$": Es gelte für alle $\boxed{\theta_{\mathrm{I}} : \Phi \to \mathfrak{A}^{\mathrm{I}},}$ dass $\tilde{\theta}_{\mathrm{I}}(\phi) = \tilde{\theta}_{\mathrm{I}}(\top)$. Wir beschreiben θ_{I} wie zuvor durch eine Familie $(\theta_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

Sei $j \in \mathrm{I}$ fest und $\theta : \Phi \to \mathfrak{A}$ eine beliebige Abbildung. Dann existiert eine Abbildung $\Delta : \Phi \to \mathfrak{A}^{\mathrm{I}}$ mit $\Delta(p) = \prod_{i \in \mathrm{I}} \delta_i(p)$, wobei $\delta_i : \Phi \to \mathfrak{A}$, sodass $\delta_j \equiv \theta$.

$\Phi \to \mathfrak{A}$

Damit gilt:

$$\tilde{\theta}(\phi) = \tilde{\delta}_j(\phi) = \tilde{\delta}_j(\top) = \tilde{\theta}(\top)$$

Dabei folgen die erste und dritte Gleichung aus der Eindeutigkeit von $\tilde{\theta}$ und die mittlere Gleichung aus $\tilde{\theta}_{\mathrm{I}}(\phi) = \tilde{\theta}_{\mathrm{I}}(\top)$, wobei diese Gleichheit komponentenweise gilt.

Beweis (Fortsetzung)

$\iota_A \to \mathfrak{B}$

b. Es gelte $\mathfrak{A} \models \phi \approx \top$. Sei $\theta : \Phi \to \mathfrak{A}_S$ eine beliebige Abbildung. Wir zeigen, dass $\widetilde{(\iota_A \circ \theta)} = \iota_A \circ \tilde{\theta}$, wobei $\iota_A : \mathfrak{A}_S \to \mathfrak{A}$ die Einbettung von $\mathfrak{A}_S$ in $\mathfrak{A}$ bezeichnet.

$$\text{(a)} \quad (\iota_A \circ \tilde{\theta})(p) = \iota_A(\theta(p)) = \theta(p) \quad \forall p \in \Phi$$

$$\text{(b)} \quad (\iota_A \circ \tilde{\theta})(\bot) = \iota_A(0) = 0$$

$$\text{(c)} \quad (\iota_A \circ \tilde{\theta})(\neg\psi) = \iota_A(-\tilde{\theta}(\psi)) = -\tilde{\theta}(\psi) \quad \forall \psi \in \mathfrak{Form}(\Phi)$$

$$\text{(d)} \quad (\iota_A \circ \tilde{\theta})(\psi_0 \vee \psi_1) = \iota_A(\tilde{\theta}(\psi_0) + \tilde{\theta}(\psi_1)) = \tilde{\theta}(\psi_0) + \tilde{\theta}(\psi_1) \quad \forall \psi_0, \psi_1 \in \mathfrak{Form}(\Phi)$$

Mit Eindeutigkeit von $\widetilde{(\iota_A \circ \theta)}$ folgt die Gleichheit der Abbildungen.

$$\tilde{\theta}(\phi) = (\iota_A \circ \tilde{\theta})(\phi) = \widetilde{(\iota_A \circ \theta)}(\phi) = \widetilde{(\iota_A \circ \theta)}(\top) = (\iota_A \circ \tilde{\theta})(\top) = \tilde{\theta}(\top)$$

$\iota_A \circ \theta : \Phi \to \mathfrak{B}$

Beweis (Fortsetzung)

c. Sei $\theta : \Phi \to \mathfrak{B}$ eine beliebige Abbildung und $\sigma : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ ein Isomorphismus. Es gelten die folgenden Gleichungen.

$$(\sigma \circ \tilde{\theta})(p) = \sigma(\theta(p)) \quad \forall p \in \Phi$$

$$(\sigma \circ \tilde{\theta})(\perp) = \sigma(0) = 0$$

$$(\sigma \circ \tilde{\theta})(\neg\psi) = \sigma(-\tilde{\theta}(\psi)) = -(\sigma \circ \tilde{\theta})(\psi) \quad \forall \psi \in \mathfrak{Form}(\Phi)$$

$$(\sigma \circ \tilde{\theta})(\psi_0 \vee \psi_1) = \sigma(\tilde{\theta}(\psi_0) + \tilde{\theta}(\psi_1)) = \sigma(\tilde{\theta}(\psi_0)) + \sigma(\tilde{\theta}(\psi_1)) \quad \forall \psi_0, \psi_1 \in \mathfrak{Form}(\Phi)$$

Daraus folgt $\sigma \circ \tilde{\theta} \equiv \widetilde{(\sigma \circ \theta)}$ und wir erhalten folgende Gleichheit.

$$(\sigma \circ \tilde{\theta})(\phi)) = \widetilde{(\sigma \circ \theta)}(\phi) = \widetilde{(\sigma \circ \theta)}(\top) = (\sigma \circ \tilde{\theta})(\top))$$

$\sigma \circ \theta : \Phi \to \mathfrak{B}$

Da σ ein Isomorphismus ist, erhält man durch Anwenden von σ^{-1} auf beiden Seiten die gewünschte Aussage $\tilde{\theta}(\phi) = \tilde{\theta}(\top)$.

$\square$

Beweis (von Theorem 10) $\vDash_C \phi \Leftrightarrow \mathrm{Set} \vDash \phi \approx \top$

"$\Rightarrow$" Sei ϕ eine Aussage und $\mathfrak{A}_{\mathrm{S}} \in \mathrm{Set}$ so gelten mit Lemma 13 für jede Menge I die folgenden Implikationen:

$$\vDash_{\mathrm{C}} \phi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2} \vDash \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2}^{\mathrm{I}} \vDash \phi \approx \top$$

Mit Proposition 11 ist die Potenzmengenalgebra $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}_{\mathrm{S}}$ isomorph zu $\mathbf{2}^{\mathrm{J}}$ für eine geeignete Menge J. Die folgenden Implikationen folgen ebenfalls aus Lemma 13.

$$\mathbf{2}^{\mathrm{J}} \vDash \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \vDash \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A}_{\mathrm{S}} \vDash \phi \approx \top$$

Die Algebra $\mathfrak{A}_{\mathrm{S}}$ war eine beliebig gewählte Unteralgebra, weshalb wir $\vDash_{\mathrm{C}} \phi \ \Rightarrow \ \mathrm{Set} \vDash \phi \approx \top$ erhalten.

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$": Es gelte $\mathrm{Set} \vDash \phi \approx \top$. Da die Menge $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Set}$ aller Potenzmengenalgebren eine Teilmenge von Set ist, gilt insbesondere $\mathrm{Set} \vDash \phi \approx \top \;\Rightarrow\; \mathrm{P} \vDash \phi \approx \top$.

Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{P}$. Mit Proposition 11 und Lemma 13 lässt sich die Implikationskette wie im Folgenden dargestellt vervollständigen.

$$\mathrm{P} \vDash \phi \approx \top \;\Rightarrow\; \mathfrak{p} \vDash \phi \approx \top \;\Rightarrow\; \mathbf{2}^{\mathrm{J}} \vDash \phi \approx \top \;\Rightarrow\; \mathbf{2} \vDash \phi \approx \top \;\Rightarrow \vDash_{\mathrm{C}} \phi$$

Dabei gilt die zweite Implikation für eine geeignete Menge J, sodass $\mathfrak{p} \cong \mathbf{2}^{\mathrm{J}}$. $\square$

Set $\vDash \varnothing \approx \top \Rightarrow \vDash_C \varnothing$

Lindenbaum-Tarski Algebren

Definition 14

Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{Form}(\Phi)$, so sagen wir ϕ und ψ sind äquivalent, falls

(i.s. syntaktisch)

$\phi \leftrightarrow \psi$ eine Tautologie ist. In diesem Fall schreiben wir $\phi \equiv_{\mathrm{C}} \psi$.

Proposition 15

Die Relation $\equiv_{\mathrm{C}}$ ist eine Kongruenzrelation auf der $\mathfrak{Form}(\Phi)$ Algebra.

Beweis (von Proposition 15)

Zunächst ist zu zeigen, dass $\equiv_{\mathrm{C}}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{Form}(\Phi)$ definiert, d.h. $\equiv_{\mathrm{C}}$ ist reflexiv, transitiv und symmetrisch. Seien $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \psi_0, \psi_1 \in \mathfrak{Form}(\Phi)$.

(i) $\phi_0 \to \phi_0$ folgt unter der Hypothese ϕ_0 mit Einführung der Implikation.

(iii) Mit den Prämissen $\phi_0 \to \phi_1$ und $\phi_1 \to \phi_2$, sowie der Hypothese $[\phi_0]$ folgt nach zweifacher Beseitigung der Implikation und anschließender Einführung der Implikation $\phi_0 \to \phi_2$. Die andere Richtung ergibt sich durch Vertauschen von ϕ_0 und ϕ_2.

Beweis (Fortsetzung)

Zu zeigen ist, dass $\phi_0 \equiv_{\mathrm{C}} \psi_0 \Rightarrow \neg\phi_0 \equiv_{\mathrm{C}} \neg\psi_0$.

$$[\neg\phi_0]^1, [\psi_0]^2, \psi_0 \to \phi_0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \to E$$

$$\phi_0 \qquad \neg\phi_0 \; (\phi_0 \to \bot)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \to E$$

$$\bot$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \to I$$

$$\neg\psi_0 \; (\psi_0 \to \bot)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \to I$$

$$\neg\phi_0 \to \neg\psi_0$$

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt noch folgende Implikation zu zeigen.

und

$$\phi_0 \equiv_{\mathrm{C}} \psi_0 \cancel{\wedge} \phi_1 \equiv_{\mathrm{C}} \psi_1 \quad \Rightarrow \quad (\phi_0 \vee \phi_1) \equiv_{\mathrm{C}} (\psi_0 \vee \psi_1)$$

$\square$

Definition 16

$[\phi]$ bezeichne für $\phi \in \mathit{Form}(\Phi)$ die Äquivalenzklasse von ϕ bezüglich $\equiv_{\mathrm{C}}$. Wir definieren die Lindenbaum-Tarski Algebra

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi) := (\mathit{Form}(\Phi)/\equiv_{\mathrm{C}}, +, -, 0)$$

mit den Verknüpfungen

$$[\phi] + [\psi] := [\phi \vee \psi] \quad \forall \phi, \psi \in \mathit{Form}(\Phi)$$

$$-[\phi] := [\neg\phi] \quad \forall \phi \in \mathit{Form}(\Phi)$$

$$0 := [\bot]$$

Da $\equiv_{\mathrm{C}}$ eine Kongruenzrelation ist, sind diese Verknüpfungen wohldefiniert und es gilt $1 = [\top]$ und $[\phi] \cdot [\psi] = [\phi \wedge \psi]$.

Proposition 17

Sei ϕ eine Aussage, sodass alle in ϕ enthaltenen Aussagevariablen in Φ enthalten sind. Dann gilt:

$$\vdash_{\mathrm{C}} \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi) \vDash \phi \approx \top$$

Beweis (von Proposition 17)

"$\Rightarrow$": Sei $\theta : \Phi \to \mathit{Form}(\Phi)/\equiv_C$ eine beliebige Abbildung und $\rho : \Phi \to \mathit{Form}(\Phi)$ eine Abbildung, sodass $\theta(p) = [\rho(p)]$.

Per Konstruktion ist ρ eine Substitution. $\tilde{\theta}(p)$

Für eine Aussage ψ bezeichne $\rho(\psi)$ die Aussage, die durch Anwenden von ρ auf die Aussagenvariablen in ψ entsteht. Die Gleichung $\tilde{\theta}(p) = [\rho(p)]$ ist für $p \in \Phi$ trivialerweise erfüllt.

Unter der Annahme, dass $\tilde{\theta}(\psi) = [\rho(\psi)]$ für alle Aussagen ψ gilt, die in höchstens n Schritten aus Φ ableitbar sind, gilt nun:

$$\text{(i)} \quad \tilde{\theta}(\neg\phi_0) = -\tilde{\theta}(\phi_0) = -[\rho(\phi_0)] = [\neg\rho(\phi_0)] = [\rho(\neg\phi_0)]$$

$$\text{(ii)} \quad \tilde{\theta}(\phi_1 \vee \phi_2) = \tilde{\theta}(\phi_1) + \tilde{\theta}(\phi_2) = [\rho(\phi_1)] + [\rho(\phi_2)]$$
$$= [\rho(\phi_1) \vee \rho(\phi_2)] = [\rho(\phi_1 \vee \phi_2)$$

Hierbei bezeichnen ϕ_0, ϕ_1 und ϕ_2 Aussagen, die in höchstens n Schritten aus Φ ableitbar sind. Damit gilt $\tilde{\theta}(\psi) = [\rho(\psi)]$ für alle Aussagen ψ, die in n+1 Schritten aus Φ ableitbar sind.

Beweis (Fortsetzung)

Die Menge der Tautologien ist unter universeller Substitution abgeschlossen. Daher gilt:

$$\vdash_{\mathrm{C}} \phi \quad \Rightarrow \quad \vdash_{\mathrm{C}} \rho(\phi) \quad \Rightarrow \quad \rho(\phi) \leftrightarrow \top \textit{ ist Tautologie}$$

$$\Rightarrow \quad \rho(\phi) \equiv_{\mathrm{C}} \top \quad \Rightarrow \quad [\rho(\phi)] = [\top],$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\theta}(\phi) = [\rho(\phi)] = [\top] = \tilde{\theta}(\top)$$

$$\Rightarrow \quad (\vdash_{\mathrm{C}} \phi \Rightarrow \underbrace{\mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi) \vDash \phi \approx \top)}$$

Beweis (Fortsetzung)

$(\mathfrak{L}_C(\Phi) \models \phi \approx \top \Rightarrow \vdash_C \phi$

"$\Leftarrow$": Es gelte $\mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi) \models \phi \approx \top$. Angenommen, ϕ wäre keine

$\vdash_C \phi$

Tautologie, d.h. $\phi \not\leftrightarrow \top$ bzw. $[\phi] \neq [\top]$.

Definiere $\iota : \Phi \to \mathit{Form}(\Phi)/\equiv_{\mathrm{C}},\ \ p \mapsto [p]$.

Analog zum vorangegangenen Teil des Beweises folgt $\tilde{\iota}(\psi) = [\psi]$.

Damit erhalten wir $\tilde{\iota}(\phi) = [\phi] \neq [\top] = \tilde{\iota}(\top)$, woraus

$\mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi) \not\models \phi \approx \top$ folgt. ↯

$\square$

Abstrakte Boolesche Algebren

Definition 18

Sei $\mathfrak{A} = (A, +, -, 0)$ eine Algebra vom Typ *Bool*, wobei die Operationen $\cdot$ und 1 wie gewohnt definiert sind. $\mathfrak{A}$ wird boolesche Algebra genannt, wenn folgende Bedingungen für $x, y, z \in A$ erfüllt sind.

$+ : \vee, \; \cdot : \wedge, \; - : \neg$ $\qquad a \cdot b = -(-a + -b)$

Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Neutrales Element	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Inverses Element	$x + (-x) = 1$	$x \cdot (-x) = 0$
Distributivgesetze	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Proposition 19

Es gelten folgende Enthaltensrelationen:

$$\text{(i)} \quad \mathbf{2} \in \mathrm{BA}$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{Set} \subseteq \mathrm{BA}$$

$$\text{(iii)} \quad \mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi) \in \mathrm{BA}$$

Beweis (von Proposition 19)

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen der Eigenschaften einer booleschen Algebra; hier am Beispiel der Lindenbaum-Tarski Algebren.
Sei $\mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi)$ eine beliebige Lindenbaum-Tarski Algebra und seien $\phi, \psi, \tau \in \mathit{Form}(\Phi)$.

$$[\phi] + [\psi] = [\phi \vee \psi] = [\psi \vee \phi] = [\psi] + [\phi]$$
$$[\phi] \cdot [\psi] = [\phi \wedge \psi] = [\psi \wedge \phi] = [\psi] \cdot [\phi]$$
$$[\phi] + ([\psi] + [\tau]) = [\phi \vee (\psi \vee \tau)] = [(\phi \vee \psi) \vee \tau] = ([\phi] + [\psi]) + [\tau]$$
$$[\phi] \cdot ([\psi] \cdot [\tau]) = [\phi \wedge (\psi \wedge \tau)] = [(\phi \wedge \psi) \wedge \tau] = ([\phi] \cdot [\psi]) \cdot [\tau]$$
$$[\phi] + [\bot] = [\phi \vee \bot] = [\phi]$$
$$[\phi] \cdot [\top] = [\phi \wedge \top] = [\phi]$$
$$[\phi] + (-[\phi]) = [\phi \vee \neg\phi] = [\top]$$
$$[\phi] \cdot (-[\phi]) = [\phi \wedge \neg\phi] = [\bot]$$
$$[\phi] + ([\psi] \cdot [\tau]) = [\phi \vee (\psi \wedge \tau)] = [(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \tau)] = ([\phi] + [\psi]) \cdot ([\phi] + [\tau])$$
$$[\phi] \cdot ([\psi] + [\tau]) = [\phi \wedge (\psi \vee \tau)] = [(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \tau)] = ([\phi] \cdot [\psi]) + ([\phi] \cdot [\tau])$$

$\square$

Theorem 20

Sei ϕ *eine Aussage. Dann gilt* $\quad \vdash_{\mathrm{C}} \phi \quad$ *iff* $\quad \mathrm{BA} \vDash \phi \approx \top$.

Beweis (Fortsetzung)

"$\Rightarrow$": Es ist zu überprüfen, ob die Regeln des Kalküls des natürlichen Schließens in der Struktur BA gültig sind.
Seien ϕ, ψ und γ Aussagen. $\vee, \neg$

Einführung von Disjunktion:

$$[\phi \vee \psi] = [\phi] + [\psi] = [\top] + [\psi] = [\top]$$

Beseitigung von Disjunktion:

$$[\neg(\phi \vee \psi) \vee \gamma] = [((\neg\phi) \wedge (\neg\psi)) \vee \gamma] = [(\neg\phi) \vee \gamma] \cdot [(\neg\psi) \vee \gamma] = [\top] \cdot [\top] = [\top]$$

Einführung der Negation:

$$[\neg\phi] = [\neg\phi \wedge (\psi \vee \neg\psi)] = [\neg\phi \wedge \psi] + [\neg\phi \wedge \neg\psi] = [\top]$$

Beseitigung der Negation:

$$[\phi \wedge \neg\phi] = [\phi] \cdot [\neg\phi] = 0 = [\bot]$$

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$": Da alle Lindenbaum-Tarski Algebren nach Proposition 19 boolesche Algebren sind, gilt mit Proposition 17 insbesondere:

$$\mathrm{BA} \models \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}_{\mathrm{C}}(\Phi) \models \phi \approx \top \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{C}} \phi$$

$\square$

Darstellungssatz für boolesche Algebren

Theorem 21 (Darstellungssatz für boolesche Algebren)

Jede boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

Korollar 22

Sei ϕ eine Aussage, so gilt:

$$\vdash_{\mathrm{C}} \phi \quad \textit{iff} \quad \models_{\mathrm{C}} \phi$$

$$\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma \models \phi$$

Beweis (zu Korollar 22)

Aus Theorem 20 folgt $\vdash_{\mathrm{C}} \phi \Rightarrow \mathrm{BA} \models \phi \approx \top$.

Da nach Proposition 19 alle Mengenalgebren insbesondere boolesche Algebren sind, erhalten wir

$$\mathrm{BA} \models \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Set} \models \phi \approx \top \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{C}} \phi.$$

Ebenso ist aus Theorem 10 bekannt, dass $\vdash_{\mathrm{C}} \phi \Leftrightarrow \mathrm{Set} \models \phi \approx \top$ gilt.

Mit dem Darstellungssatz sind alle booleschen Algebren isomorph zu einer Mengenalgebra, weshalb

$$\mathrm{Set} \models \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \mathrm{BA} \models \phi \approx \top \quad \Rightarrow \quad \vdash_{\mathrm{C}} \phi.$$

$\square$