Def: Eine Menge κ ist eine stark unerreichbare Kardinalzahl
gdw:
1) κ ist Limes-Kardinalzahl
2) κ ist regulär $(\mathrm{cf}\,\kappa = \kappa)$
3) $\forall \alpha < \kappa : 2^\alpha < \kappa$
4) $\kappa > \omega$

$(I) := \exists \kappa :$ κ ist unerreichbare KZ

$\boxed{\text{Ziel: zeige } ZFC \nvdash (I)}$

1 Idee: Konstruiere mit ZFC ein Modell $\mathcal{M} = (M, E)$ mit $\underline{\mathcal{M} \models ZFC + \neg I}$

zugrundeliegende Menge

binäre Relation

Falls $ZFC \vdash I \overset{\text{Vollst.}}{\Rightarrow} ZFC \models I \Rightarrow$ W↯

$\underline{\mathcal{M} \nvDash I}$

Problem: Dann würde gelten: $\underbrace{ZFC \vdash Con(ZFC)}_{\text{falsch}}$

W↯ zu Unvollständigkeit

z.B. $PA \nvdash Con(PA)$

2. Idee:

$$\big(Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + \neg I)\big) \overset{?}{\longrightarrow} ZFC \nvdash I$$

halten wir für wahr.

Angenommen, $ZFC \vdash I \Rightarrow ZFC + \neg I \vdash I$

$\rightarrow$ W↯ zu $Con(ZFC + \neg I)$

Def: Seien T eine Satzmenge und A ein Satz.

Dann heißt A konsistent in T, wenn aus $Con(T)$ $Con(T + A)$ folgt.

$T = ZFC$

$A = \neg I$ oder $A = CH$ z.B.

$\rightarrow$ Klassen als "Modell" benutzbar

Def. Relativierung.

Sei M eine Klasse und φ eine $\{\in\}$-Formel.

Definiere die Relativierung von φ zu M φ^M induktiv:

$\forall x \varphi$ bezieht sich auf Universum

$(x \in y)^M := x \in y$

$(x = y)^M := x = y$

$(\neg\varphi)^M := \neg\varphi$

$(\varphi \vee \psi)^M := \varphi \vee \psi$

$(\exists x \varphi)^M := (\exists x \in M)\varphi$

$(\forall x \varphi)^M := \forall x (x \in M \rightarrow \varphi)$ bzw $(\forall x \in M)\varphi$.

Wir sagen "φ ist wahr in M" gdw. φ^M wahr ist

worin? $\rightarrow$ Universum

Falls M eine Menge φ^M gdw. $M \models \varphi$

Falls M echte Klasse: ~~$M \models \varphi$~~ $\quad (M, \in|_{M \times M}) \models \varphi$

Lemma: Seien T, S Satzmengen der Sprache $\{\in\}$ und M eine Klasse.

Falls $T \vdash \varphi^M$ f.a. $\varphi \in S$, so gilt

$$Con(T) \Rightarrow Con(S)$$

Bew. Angenommen, $Con(T) \wedge \neg Con(S) \wedge \forall \varphi \in S\ T \vdash \varphi^M$

$\Rightarrow$ ex. $\psi_1, \dots, \psi_n, \chi \in S$: $\quad \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \vdash \chi \wedge \neg\chi$

gdw $\vdash (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow (\chi \wedge \neg\chi)$

$\Rightarrow \vdash [(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow (\chi \wedge \neg\chi)]^M$

gdw. $\underbrace{\vdash (\psi_1^M \wedge \dots \wedge \psi_n^M) \rightarrow (\chi^M \wedge \neg\chi^M)}$

Es gilt $T \vdash (\psi_1^M \wedge \dots \wedge \psi_n^M)$. Aus folgt $T \vdash (\chi^M \wedge \neg\chi^M)$

W zu $Con(T)$. $\square$

Plan: $T = ZFC$, M Klasse, $S = ZFC + \neg I$ und $ZFC \vdash \varphi^M\ \forall \varphi \in ZFC$, dann $Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + \neg I)$

$$(Ext)^M \Leftrightarrow [\forall x \forall y\ \ x = y \Leftrightarrow (\forall u \cdot u \in x \Leftrightarrow u \in y)]^M$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M\ \forall x \in y:\ x = y \Leftrightarrow (\forall u \in M:\ u \in x \Leftrightarrow u \in y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in M:\ x = y \Leftrightarrow x \cap M = y \cap M$$

M transitiv $\quad x \in M \Rightarrow x \subseteq M$

Bsp:

$\{0, 1, \{0,1\}, \{0,1,3\}\}$

Es gilt $\forall u \in M: u \in \{0,1\} \Leftrightarrow u \in \{0,1,3\}$

$\Rightarrow (\neg \mathrm{Ext})^{M_1}$ (da M_1 Menge: $M_1 \models \neg \mathrm{Ext}$

$\Rightarrow$ Modell der Mengenlehre transitiv

<u>Def.</u> Eine $\{\in\}$-Formel φ ist Δ_0 gdw.

i) φ ist atomar $x = y$ $x \in y$

ii) $\varphi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$, $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$, $\varphi \equiv (\psi_1 \to \psi_2)$, $\varphi \equiv \neg\psi_1$
wobei ψ_1, ψ_2 Δ_0 sind

iii) $\varphi \equiv \forall x \in y: \psi_1$
$\varphi \equiv \exists x \in y: \psi_1$ mit ψ_1 ist Δ_0

<u>Lemma:</u> Sei M eine transitive Klasse, und $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sei Δ_0.
Dann gilt:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n: \left[x_1 \in M \wedge \dots \wedge x_n \in M \to \left(\varphi(x_1, \dots, x_n)^M \Leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)\right)\right]$$

Wir sagen dann "M spiegelt φ", "φ absolut für M"

<u>Bew:</u> Formelinduktion.

i), ii) $\to$ ✓

Also sei $\varphi \equiv \exists x \in y\, \psi(x, y, \dots)$ wobei M spiegelt ψ
Seien $y, \dots \in M$

$\varphi^M \Leftrightarrow [\exists x \in y\, \psi(x, y, \dots)]^M \Leftrightarrow \exists x \in M: x \in y \wedge \psi(x, y, \dots)^M$

$\Leftrightarrow \exists x \in M: x \in y \wedge \psi(x, y, \dots) \Longleftrightarrow \exists x \in y: \psi(x, y, \dots)$

$y \in M \wedge x \in y \in M \Rightarrow x \in M$. Also: Aus $\exists x \in y\, \psi$ folgt $\exists x \in M: x \in y \wedge \psi(\dots)$ $\square$

<u>Lemma:</u> Folgende Formeln sind Δ_0:

$x = \emptyset$

x ist leer ↔ ∀u ∈ x: u ≠ u

x ⊂ y ↔ ∀u ∈ x: u ∈ y

x ist transitiv ↔ ∀u ∈ x: u ⊂ x

x ist eine Ordinalzahl ↔ x ist transitiv ∧ (∀u,v ∈ x: u ∈ v ∨ v ∈ u ∨ u = v) ∧ (∀u,v,w ∈ x : u ∈ v ∈ w → u ∈ w)

(x ist eine Limesordinalzahl ↔ x is an ordinal ∧ (∀u ∈ x)(∃v ∈ x) u ∈ v)

Auch x=w ist Delta0.

x ist kofinal in y ↔ x⊂y ∧ ∀u∈y ∃v∈X : u∈v

x = {u, v} ↔ u ∈ x ∧ v ∈ x ∧ (∀w ∈ x : w = u ∨ w = v)

x = (u, v) ↔ (∃w ∈ x)(∃z ∈ x)(w = {u} ∧ z = {u, v}) ∧ (∀w ∈ x)(w = {u} ∨ w = {u, v})

z ∈ dom X ↔ (∃x ∈ X)(∃u ∈ X)(∃v ∈ u) x = (z,v)

(∀z ∈ dom X) φ ↔ (∀x ∈ X)(∀u ∈ x)(∀z,v ∈ u)(x = (z,v) → φ)

X ist eine Relation ↔ (∀x ∈ X)(∃u ∈ dom X)(∃v ∈ ran X) x = (u, v)

f ist eine Funktion ↔ f ist eine Relation ∧ (∀x ∈ dom f)(∀y, z ∈ ran f): (∃u ∈ f: u=(x, y) ∧ (x, z) ∈ f) → y = z

f(x) = y ↔∃u ∈f : u = (x,y)

f injektiv ↔∀x,y ∈dom(f) : x ≠ y →f(x) ≠ f(y)

(f ist Bijektion) Δ_0

f surjektiv ↔∀y ∈ran(f)∃x ∈dom(X) : f(x) = y

<u>Satz:</u> Falls κ eine unerreichbare Kardinalzahl, so gilt $\underline{V_\kappa \models ZFC}$. (bzw. φ^{V_κ} $\forall \varphi \in ZFC$ gilt)

$V_\kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} V_\alpha$

<u>Beweis:</u>

- ~~$(Ext)^{V_\kappa} \equiv \forall x \in V_\kappa \forall y \in V_\kappa : (x = y \Leftrightarrow \underbrace{\forall u \in V_\kappa : u \in x \Leftrightarrow u \in y}_{x \subseteq y \wedge y \subseteq x})$~~

  ~~(*) ist Δ_0~~

  ~~Lemma ⟹ $\forall x, y \in V_\kappa$: $(*)^{V_\kappa} \Leftrightarrow *$~~

falsch !! ☹

Da wir 2 Mengen für gleich halten, wenn <u>alle</u> ihre Elemente gleich sind, gilt $(Ext)^{V_\kappa}$

- $(Paar)^{V_\kappa} \equiv (\forall x \forall y \exists z \; z = \{x, y\})^{V_\kappa}$

$z = \{x, y\} \Leftrightarrow x \in z \wedge y \in z \wedge$

$\Leftrightarrow \forall x y \in V_\kappa\ \exists z \in V_\kappa : (z = \{x,y\})^{V_\kappa}$ Δ_0!

$\forall u \in z: u = x \vee u = y$

In der Tat ist für $x,y \in V_\kappa$ auch $\{x,y\} \in V_\kappa$

Lemma $\Rightarrow \forall x,y,z \in V_\kappa: (z = \{x,y\})^{M} \Leftrightarrow z = \{x,y\}$ Also ist $\{x,y\}$ das gesuchte $\{x,y\}^{V_\kappa} \in V_\kappa$

$(Pot)^{V_\kappa} \equiv (\forall x\ \exists y\ \forall u\ u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x)^{V_\kappa}$

$\Leftrightarrow \forall x \in V_\kappa \exists y \in V_\kappa \forall u \in V_\kappa : u \in y \Leftrightarrow (u \subseteq x)^{V_\kappa}$

$\Leftrightarrow \forall x \in V_\kappa \exists y \in V_\kappa \forall u \in V_\kappa : u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x$ $V_\kappa \cap u = u$

$\Leftrightarrow \forall x \in V_\kappa \exists y \in V_\kappa \forall u : \quad u \in y \Leftrightarrow u \in V_\kappa \wedge u \subseteq x$

$\Leftrightarrow \forall x \in V_\kappa : \mathcal{P}(x) \cap V_\kappa \in V_\kappa$

Das ist wahr: $x \in V_\kappa \Rightarrow \exists \alpha: x \in V_\alpha \quad \alpha < \kappa$

$\Rightarrow \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x) \cap V_\kappa \in V_{\alpha+1}$

V_κ transitiv

(ERS)

Zwischenlemma: 1) $|V_\kappa| = \kappa$

2) $x \subseteq V_\kappa \wedge |x| < \kappa \rightarrow x \in V_\kappa$

3) $x \in V_\kappa \rightarrow |x| < \kappa$

zu 1)

$V_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} V_\alpha$

$\forall \alpha: |V_\alpha| \geq |\alpha|$

Per transfiniter Induktion

- $|V_0| = 0 = |\emptyset|$
- $|\alpha+1| = |\alpha|$, also $|V_\alpha| \geq |\alpha|$

$\Rightarrow |V_{\alpha+1}| \geq |\alpha+1|$

- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$

λ Limes

$|\alpha| \leq |V_\alpha|$

$\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha \Rightarrow |\lambda| = \sup_{\alpha<\lambda} |\alpha| \leq \sup_{\alpha<\lambda} |V_\alpha| = |V_\lambda|$

Jetzt: $|V_\kappa| \leq \kappa$

Angenommen, $|V_\kappa| > \kappa$

Dann existiert $\xi < \kappa$: $|V_\xi| \geq \kappa$

Wähle unter diesen das kleinste ξ_0

$\Rightarrow \xi_0 \neq \alpha+1$, $\alpha + 0 t$

$V_{\xi_0} = \bigcup_{\alpha<\xi_0} V_\alpha$; $|V_\alpha| < \kappa\ \forall \alpha < \xi_0$

und $\xi < \kappa$

W zu $cf\ \kappa = \kappa$ ↯

$\Rightarrow |V_\kappa| = \kappa$

zu 2). Sei $x \subseteq V_\kappa \wedge |x| < \kappa$ $|V_\kappa| = \kappa$

κ regulär $\Rightarrow \exists \alpha < \kappa : x \subseteq V_\alpha \Rightarrow x \in V_{\alpha+1}$

zu 3). angenommen, $x \in V_\kappa$ und $|x| = \kappa$. Dann $V_\kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} V_\alpha$

ex $\alpha < \kappa$: $x \in V_\alpha$. ← transitiv $\Rightarrow x \subseteq V_\alpha$

$\Rightarrow |V_\alpha| > \kappa \Rightarrow \kappa \geq 2^\kappa > \kappa$ W↗

Zurück zu ERS: z.z.: $F : X \to V_\kappa$ Funktion, $x \in V_\kappa$, dann $F \in V_\kappa$:

Es ist $|\mathrm{ran}(F)| \leq |X| \overset{3)}{<} \kappa \Rightarrow \mathrm{ran}(F) \overset{2)}{\in} V_\kappa$ $\mathrm{ran}(f) \subseteq V_\kappa$

V_κ abg. bzgl $\mathcal{P}$ und $\times$: $F \in V_\kappa$ $(F \subseteq X \times \mathrm{ran}(F))$

//

Satz: Es gilt: 1) $ZFC \nvdash I$

2) $Con(ZFC) \nvdash Con(ZFC + I)$

Bew:

α OZ ist Δ_0

$|X| < |Y| \leftrightarrow (\exists A \subset Y : |X| = |A|) \wedge |X| \neq |Y|$

$|X| = |Y| \leftrightarrow \exists f$: f ist funktion von X nach Y $\wedge$ f bijektiv $X, Y \in M \wedge \neg \exists f : X \to Y$ mit $f \in M)$

α ist KZ $\leftrightarrow \alpha$ ist OZ $\wedge \forall \beta : (\beta$ ist OZ $\wedge |\beta| = |\alpha|) \to \alpha \in \beta$

$\alpha = cf(\lambda) \leftrightarrow \alpha$ ist KZ $\wedge (\exists Z \subset \lambda$: Z ist kofinal in $\lambda \wedge |\alpha| = |Z|) \wedge \forall X \subset \lambda$: (X ist kofinal $\rightarrow |\alpha| \leq |X|$)

α ist reguläre KZ $\leftrightarrow \alpha$ ist KZ $\wedge \alpha = cf(\alpha)$

α ist stark unerreichbar KZ $\leftrightarrow \alpha$ ist reguläre KZ $\wedge \forall \mu : \mu \in \alpha \rightarrow |P(\mu)| < |\alpha|$

$\updownarrow$

$(\alpha$ ist stark un. KZ$)^{V_\kappa}$

F

alls $\exists \tilde{\kappa} \in V_\kappa$ unerreichbar

$\kappa_0 := \min\{\alpha \in \tilde{\kappa} ; \alpha \text{ unerreichbare KZ}\}$

sonst $\kappa_0 = \kappa$. Es gilt: f.a. $\alpha \in V_{\kappa_0}$

$(\alpha \text{ unerreichbare KZ})^{V_{\kappa_0}} \iff \alpha$ unerreichbare KZ

$\Rightarrow V_{\kappa_0} \models \neg I + ZFC$ bzw. $\varphi^{V_{\kappa_0}}$ $\forall \varphi \in ZFC + \neg I$ $(V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha)$

Anderer Fall: Dann gilt $(\neg I)^V$

$\forall \varphi \in ZFC$, gilt φ^V $\forall \varphi \in ZFC + \neg I$

$\cancel{V \models ZFC}$

Um dies z.z. ZI

$\exists C$ benutzt $\Rightarrow ZFC \vdash \varphi^M$ $\forall \varphi \in ZFC + \neg I$. M Klasse

und $\mathrm{Con}(ZFC) \vdash \mathrm{Con}(ZFC + \neg I)$

$\Rightarrow ZFC \nvdash I$

2)

Ang.: $\mathrm{Con}(ZFC) \vdash \mathrm{Con}(ZFC + I)$

Lemma. $\Rightarrow ZFC + I \vdash \exists A : A \models ZFC$ Vollständigkeit

also $ZFC + I \vdash \mathrm{Con}(ZFC)$

und $ZFC + I \vdash \mathrm{Con}(ZFC + I)$

Unvollständigkei

$\square$

$PA \nvdash \mathrm{Con}(PA)$, aber

$ZFC \vdash \mathrm{Con}(PA)$

und

$ZFC \nvdash \mathrm{Con}(ZFC)$, aber

$ZFC + I \vdash \mathrm{Con}(ZFC)$

Satz von Tarski

Dienstag, 25. Januar 2022 15:12

Diagonallemma: Sei $\varphi(x)$ eine Formel der Sprache der Arithmetik $\{0,1,+,\cdot\}$ mit der freien Variable x. Dann existiert eine Formel ψ mit

$$\mathbb{N} \models \psi \Leftrightarrow \varphi(\ulcorner\psi\urcorner).$$

$\square$

Def: Eine arithmetische Formel T heißt Wahrheitsprädikat, wenn f.a. Sätze σ gilt:

$$\mathbb{N} \models \sigma \Leftrightarrow T(\ulcorner\sigma\urcorner)$$

$\rightarrow$ Definiert $\tilde{T} := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Gödelnummer von wahrer Formel}\}$

Satz von Tarski: $\tilde{T}$ ist nicht definierbar

Bew: Ang. doch. Dann existiert Formel T:

$$\mathbb{N} \models \sigma \Leftrightarrow T(\ulcorner\sigma\urcorner)$$

Diaglemma $\Rightarrow$ $\exists \psi$: $\mathbb{N} \models \psi \Leftrightarrow \neg T(\ulcorner\psi\urcorner) \Leftrightarrow \neg\psi$ W↯

$\varphi = \neg T(x)$

$\square$

Es gibt noch etwas andere Versionen dieses Satze. Auf jeden Fall sehen wir, dass innerhalb unserer gewählten Sprache; der Sprache der Arithmetik, der semantische Wahrheitsbegriff sich nicht syntaktisch definieren lässt. Um über die Wahrheit von arithmetischen Formeln zu sprechen, benötigt man also eine Metasprache: In unserem Fall ist es die Semantik.

Das Resultat lässt sich übertragen auf Sprachen, die Negation und genügend selbstreferenz aufweisen, sodass das Fixpunkttheorem gilt, übertragen. wie z.B. auch die Sprache der Mengenlehre mit den Axiomen von ZFC soweit ich es verstehe. Die Aussage ist verwandt mit den Sätzen von Gödel.

Gödelnummern.

¬	∧	∨	→	↔
↕	↕	↕	↕	↕
1	3	5	7	9
∀	∃	=	(	)
↕	↕	↕	↕	↕
11	13	15	17	19
0	s	+	×	
↕	↕	↕	↕	
21	23	25	27	
x	y	z	…	
↕	↕	↕	↕	
2	4	6	…	

$\ulcorner\urcorner$

$\overset{11}{\forall}\ \overset{2}{x}\ \overset{17}{(}\ \overset{13}{\exists}\ \overset{4}{y}\ \overset{17}{(}\ \overset{2}{x}\ \overset{15}{=}\ \overset{4}{y}\ \overset{19}{)}\ \overset{19}{)}$

11 2 17 13 4 17 2 15 4 19 19

$2 \cdot 3\ 5 \cdot 7 \cdot 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31$

Umgekehrt $2250 = 2^1 \cdot 3^2\, 5^3 \equiv \neg x 1$