

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 6.8 (Fortsetzung)

Konvergenzbegriffe und Grenzwertsätze

Beispiel: $EY_n \rightarrow c, \text{Var}Y_n \rightarrow 0 \Rightarrow Y_n \rightarrow c?$

Gegeben: $X, X_1, X_2, \dots \in \overline{\mathcal{F}}$. Gesucht: Grenzverhalten von X_n für $n \rightarrow \infty$.

Definition „Konvergenz“: (a) $X_n \rightarrow X$ (punktweise): $\Leftrightarrow X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \forall \omega$.

(b) $X_n \xrightarrow{P-f.s.} X$ (P -fast-sicher): $\Leftrightarrow \exists N$ mit $P(N)=0$ und $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \forall \omega \in N^c$.

(c) $X_n \xrightarrow{st} X$ (stochastisch): $\Leftrightarrow P(|X_n - X| < \varepsilon) \rightarrow 1 \forall \varepsilon > 0$.

(d) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$ (in $\mathcal{L}^p, p \geq 1$): $\Leftrightarrow \|X_n - X\|_p \rightarrow 0$ ($\|Y\|_p := (\int |Y|^p dP)^{1/p}$).

Auch $p = \infty$: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^\infty} X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{glm} X$. ($\|Y\|_p \rightarrow \|Y\|_\infty = \sup |Y|$)

(e) $X_n \xrightarrow{V} X$ (nach Verteilung): $\Leftrightarrow F^{X_n}(t) \rightarrow F^X(t) \forall t$ mit $P^X(\{t\}) = 0$ (in $\mathbb{R}$).

Beispiel: $X_n \sim \mathcal{N}(0, n), X \sim \varepsilon_0, F^{X_n}(t) = \Phi(t/\sqrt{n}), F^X(t) = 1_{[0, \infty)}(t)$ ($t=0?$).

Für $X_n \rightarrow X$ gilt: „punktw.“ $\Rightarrow P$ -f.s. $\Rightarrow$ stoch., $\mathcal{L}^p \Rightarrow \mathcal{L}^1 \xrightarrow{(*)}$ stoch. $\Rightarrow V$.

Zu (*): Chebyshev-Markov-Ungleichung:

$$P(|Y| \geq \varepsilon) \leq E|Y|^p / \varepsilon^p.$$

Bew.: $P(|Y| \geq \varepsilon) = \int g(Y) dP$ mit

$$g(y) := 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c}(y) \leq |y|^p / \varepsilon^p.$$

Schwaches und starkes Gesetz der großen Zahlen

Def.: $X_1, X_2, \dots$ erfüllt das schwache [starke] Gesetz der großen Zahlen

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \tilde{S}_n := \frac{1}{n} (S_n - ES_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow{st} 0 \left[\xrightarrow{P-f.s.} 0 \right]. (X_i \text{ i.v.} \Rightarrow ?)$$

Satz: $X_1, X_2, \dots$ unkorreliert und $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i \rightarrow 0$ (o. $\text{Var} X_i = \text{Var} X_1 < \infty$)
 $\Rightarrow (X_n)$ erfüllt das **schwache Gesetz** der großen Zahlen.

Beweis: $\text{Var}(\frac{1}{n} S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i \Rightarrow \frac{1}{n} \tilde{S}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \tilde{S}_n \xrightarrow{st} 0$.

Beispiele: 1. $X_n \sim B(p) \Rightarrow \frac{1}{n} S_n \xrightarrow{st} p$ ($\frac{1}{n} (S_n - np) \xrightarrow{st} 0$).

2. X_i u.i.v. $\Rightarrow \widehat{F}_n^X(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}} \xrightarrow{st} E 1_{\{X_1 \leq t\}} = F^{X_1}(t), t \in \mathbb{R}$.

Satz: $X_1, X_2, \dots$ paarw. stoch. unabh., identisch verteilt, $E|X_i| < \infty$
 $\Rightarrow (X_n)$ erfüllt das **starke Gesetz** der großen Zahlen.

Zentraler Grenzwertsatz

Def.: $X_1, X_2, \dots$ erfüllt den Zentralen Grenzwertsatz $\Leftrightarrow$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)}{\text{Str}(\sum_{i=1}^n X_i)} \xrightarrow{V} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Satz: $X_1, X_2, \dots$ (z.B.) stoch. unabhängig, identisch verteilt, $\text{Var} X_i < \infty$
 $\Rightarrow (X_n)$ erfüllt den Zentralen Grenzwertsatz.