

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 6.8

A Allg. Koppelung: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}(\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{A}_i\})$,
 $P := P_1 \otimes P_2^1$: $P(A) = \int P_1(d\omega_1) \int P_2^1(\omega_1; d\omega_2) 1_A(\omega_1, \omega_2)$, P_2^1 ist **Ü-W-Maß**
 ($P(\omega_1, A_2)$ ist mb in ω_1 , W-Maß in A_2). $P(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} P_1(d\omega_1) P_2^1(\omega_1; A_2)$.
 Lemma: Integranden $\omega_2 \mapsto 1_A(\omega_1, \omega_2)$ u. $\omega_1 \mapsto \int P_2^1(\omega_1; d\omega_2) 1_A(\omega_1, \omega_2)$ messbar.
 Satz: (a) $P_1 \otimes P_2^1$ ist W-Maß, (b) P ist durch $P(A_1 \times A_2)$ eind. bestimmt.

Satz v. Fubini: (a) $f \in \overline{\mathcal{F}}$, $\geq 0 \Rightarrow \int f dP = \int P_1(d\omega_1) \int P_2^1(\omega_1; d\omega_2) f(\omega_1, \omega_2) (*)$,
 (b) $f \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow (*)$, falls r.S. für f^+ oder f^- oder für $|f|$ endlich ist.
 (c) Entspr. für σ -endl. Maße μ_1, μ_2 , $\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int d\mu_1 \int d\mu_2 1_A \stackrel{(!)}{=} \int d\mu_2 \int d\mu_1 1_A$.

Folgerungen: 1. Existenz der rechten Seite von $(*)$ reicht nicht.

2. „Alles auch n -stufig“. Für $n = \infty$ gilt der Satz von IONESCU-TULCEA.

3. $f_i^{i-1} \mu_i$ -Ü-Dichte v. P_i^{i-1} , μ_i σ -endl. $\Rightarrow f = f_1^0 \otimes f_2^1 \mu_1 \otimes \mu_2$ -**Dichte** v. $P_1^0 \otimes P_2^1$.

4. $X_1, \dots, X_n$ **stoch.unabhängig** $\Leftrightarrow P^{(X_1, \dots, X_n)} = P^{X_1} \otimes P^{X_2} \otimes \dots \otimes P^{X_n}$.
 $\Leftrightarrow P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in A_n)$, $A_i \in \mathcal{A}_i$ [$\in \mathcal{E}_i$?] $\forall i$.

5. **Produkt-Dichte:** f^{X_i} sei μ_i -Dichte v. P^{X_i} , μ_i σ -endlich ($i = 1, \dots, n$).

$X_1, \dots, X_n$ st.u. $\Leftrightarrow f^{X_1} \otimes f^{X_2} \otimes \dots \otimes f^{X_n}$ ist $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ -Dichte v. $P^{(X_1, \dots, X_n)}$.

6. $P^{(X_1, X_2)} = P^{X_1} \otimes P_2^1 \Rightarrow P^{X_2|X_1} := P_2^1$ heißt **bedingte Vert.** von X_2 unter X_1 .

Existenz? Fall 1: Mit μ -Dichte $f^{(X_1, X_2)}$ von $P^{(X_1, X_2)}$ Konstruktion wie Satz 5.14.

Allg. Fall 2: Existenz und P^{X_1} -f.s. eindeutig, falls Ω'_2 „polnisch“, d.h. ein vollst. separabler metr. Raum, und $\mathcal{A}'_2$ von off. Mengen erzeugt (s. Bauer, §44).

B Zufällige Summen und bedingte Erwartungswerte

Beispiel: Gesamtschaden S aus Anzahl Y der Schäden und Schadenhöhen X_i .

$S(\omega) = \sum_{i=1}^{Y(\omega)} X_i(\omega)$ [S ist ZV wg. $S(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{Y \geq i\}}(\omega) X_i(\omega)$].

S heißt **zufällige Summe**, falls $Y, X_1, X_2, \dots$ st.u. und X_i ident. verteilt.

Folgerung: $ES = EY \cdot EX_1$ und $\text{Var} S = EY \cdot \text{Var} X_1 + \text{Var} Y \cdot (EX_1)^2 (**)$.

Interpretation von $\text{Var} S$: 1.[2.] Term = „Mittl. Varianzanteil“ durch X_i [Y].

Beweis. Allg.: $ES = \int P^Y(dy) \int P^{S|Y}(y; ds) \cdot s = \int P^Y(dy) h(y) = E h(Y)$

mit $h(y) = E(S|Y=y) := \int P^{S|Y}(y; ds) \cdot s$, kurz $ES = E[E(S|Y)]$ (!).

Def.: $E(S|Y=y)$ und $E(S|Y) := h(Y)$ heißen **bedingte Erwartungswerte**.

Zu (**): Mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ist $h(n) = E(S|Y=n) = E(S_n|Y=n) = ES_n = n \cdot EX_1$
 $\Rightarrow E h(Y) = EY \cdot EX_1$; $E(S^2|Y=n) = E(S_n^2) = E(\text{Var} S_n + (ES_n)^2) = n \text{Var} X_1$
 $+ n^2 (EX_1)^2 \Rightarrow \text{Var} S = ES^2 - (ES)^2 = EY \cdot \text{Var} X_1 + (EY^2 - (EY)^2) \cdot (EX_1)^2$.