Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 6.4: Das Maß-Integral (Fortsetzung)

Satz v.d. mon. Konv. (s.o.): $f_n \in \overline{\mathcal{F}},\ 0 \le f_n \uparrow f \Rightarrow \lim_n \int f_n\, d\mu = \int \lim_n f_n\, d\mu$.
Beweis: (a) $0 \le f_n \le f_{n+1} \le f \Rightarrow \int f_n\, d\mu \le \int f_{n+1}\, d\mu \le \int f\, d\mu \Rightarrow$ Beh. mit „$\le$".
(b) **Z.z.** l.S.$\ge \int g\, d\mu\ \forall g \in \mathcal{F}^*_+,\ g \le f$. Idee: g wird gestutzt.
$g_n := c\, g 1_{B_n}$ mit $c<1$, $B_n := \{\omega : c\, g(\omega) \le f_n(\omega)\} \Rightarrow B_n \uparrow \Omega$
$[f(\omega)=0 \Rightarrow g(\omega)=0\ //\ f(\omega)>0 \Rightarrow c\, g(\omega) < f(\omega) \Rightarrow \exists f_n \ldots]$
$\Rightarrow$ l.S. $\ge \int f_n\, d\mu \ge \int f_n 1_{B_n} d\mu \ge c \int g\, 1_{B_n} d\mu \uparrow^{(*)} c \int g\, 1_\Omega d\mu$.
$\Rightarrow$ l.S. $\ge c \int g\, d\mu\ \forall c<1$, dann $c \uparrow 1$, $^{(*)}$ mit $g = \sum a_i 1_{A_i}$.

Lemma v. Fatou: $f_n \in \overline{\mathcal{F}}, f_n \ge 0 \Rightarrow \int (\liminf f_n)\, d\mu \le \liminf \int f_n\, d\mu$, entspr.
$f_n \le 0$: $\int (\limsup f_n) d\mu \ge \limsup \int f_n\, d\mu$. Merke: $\int (\inf f_n) d\mu \le [\inf] \int f_n d\mu$.
Beweis: $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{n\ge k} f_n =: \lim\limits_k g_k,\ g_k \uparrow \Rightarrow \int \lim\limits_k g_k d\mu = \lim\limits_k \int \inf\limits_{n\ge k} f_n d\mu \le \lim\limits_k \inf\limits_{n\ge k} \int f_n d\mu$.

Varianten zu M.K. u. L.v.F.: $f_n \ge -g$ mit $g \ge 0$, μ-int., Bew. mit $\tilde{f}_n := f_n - g$.

Majorisierte Konv.: $f_n \in \overline{\mathcal{F}},\ f_n \to f,\ |f_n| \le g,\ g$ μ-int. $\Rightarrow \lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu$.
Beweis: $\limsup \int f_n d\mu \le \int \limsup f_n\, d\mu = \int \liminf f_n\, d\mu \le \liminf \int f_n\, d\mu$, $\Rightarrow$ „=".

Schreibweise: $\int_A f\, d\mu := \int f\, 1_A\, d\mu$, z.B. $\int_{(a,b]} f\, d\lambda$.

Definition: (a) $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt μ-**Nullmenge** (Nullmenge).
(b) R μ-f.s. (R gilt μ-**fast sicher**) $:\Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : R(\omega)$ gilt nicht$\} \subset N$ mit $\mu(N)=0$.
Beisp.: $f=g$ μ-f.s., $f \to g$ μ-f.s., auch $f=g$ $[\mu]$, $f=g$ μ-a.e. (almost everywhere).

Folgerungen: (a) $\mu(N)=0 \Rightarrow \int_N f\, d\mu = 0$. (b) $f=g$ μ-f.s. $\Rightarrow \int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.
(c) $f \ge 0$, $\int f\, d\mu = 0 \Rightarrow f=0$ μ-f.s. (d) f μ-integr. $:\Leftrightarrow \int f\, d\mu$ endl. $\Rightarrow f$ endl. μ-f.s.
(e) f, g μ-int., $\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu\ \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow f=g$ μ-f.s.
Bem.: Bei „Mon.Konv.", „L.v.Fatou", „Maj.Konv." genügen Vorauss. mit μ-f.s.

μ-Dichten: Satz: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$, $f \ge 0 \Rightarrow \nu : A \mapsto \nu(A) := \int_A f\, d\mu$ ist e. Maß
und $\int g\, d\nu = \int g\, f\, d\mu$ $(*)$, falls l.S. o. r.S. ex.. Beweis $(*)$: 1. $g = 1_A$ n.Def., 2. g elem.
Def.: (a) f (wie oben) heißt μ-**Dichte** von ν. (b) $\mu_a(A) := |A|$: **Zählmaß**.
Folg.: Falls ν σ-endlich, dann ist f μ-f.s. eindeutig bestimmt [nach Folg. (e)].
Spezialfall: P mit Z-Dichte f: Ω abz., $\mu_a(A) := |A| \Rightarrow P(A) = \int_A f\, d\mu_a = \sum_A f(\omega)$.

Trafo-Formel: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \xrightarrow{X} (\Omega', \mathcal{A}', \mu^X) \xrightarrow{g} (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}}) \Rightarrow \int g(X) d\mu = \int g\, d\mu^X$ (ex.?)

Anwend. auf $Eg(X), EX$: (a) $Eg(X) = \int g(X) dP = \int g\, dP^X$ $[= \int g(x)\, P^X(dx)]$.
(b) P^X habe μ-Dichte f^X: $Eg(X) = \int g\, dP^X = \int g\, f^X d\mu$ $[= \int g(x)\, f^X(x)\, \mu(dx)]$.
(c) P^X habe Z-/μ_a-Dichte f^X: $Eg(X) = \int g\, dP^X = \int g\, f^X d\mu_a = \sum_{x\in\Omega'} g(x)\, f^X(x)$.
(d) P^X habe R-/λ-Dichte f^X: $Eg(X) = \int g\, dP^X = \int g\, f^X\, d\lambda = \int g(x)\, f^X(x)\, dx$.