

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 5.1

A1 Nachtrag: Empirische Verteilung/Verteilungsfunktion

Die *empirische Verteilung* eines Datensatzes $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist die relative Häufigkeit der x_i . Sie hat die Z-Dichte $\hat{f}_n^{\mathbf{x}}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x\}}(x_i)$, $x \in \Omega$, und die Verteilungsfunktion $\widehat{F}_n^{\mathbf{x}}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x]}(x_i)$, $x \in \mathbb{R}$.

A2 Nachtrag: Maßdefinierende Funktion (mdF)

Eine maßdefinierende Funktion ist eine isotone, r.s.stetige Abb. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sie erzeugt durch $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$ ein Maß μ mit $\mu((-n, n]) < \infty \forall n$. Die Zuordnung ist bis auf eine additive Konstante bei F eindeutig.

B Messbare Abbildungen (Ergänzungen zu Folgerung 5.1, s. z.B. B/N § 16)

Begriffe: Zufallsvariable, Urbildfunktion $X^{-1}(A') := \{X \in A'\}$, Messbarkeit.

Definition 5.4: $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ seien Messräume. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar (kurz: messbar), falls $f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad (f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}')$.

Folg. 5.1(f): Mit $f : \Omega \rightarrow \Omega', g : \Omega' \rightarrow \Omega''$ ist auch $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega''$ messbar.

Satz: $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ ist $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar mit $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mathcal{E}')$ $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{A}$.

Beweis: „ $\Leftarrow$ “: $\widetilde{\mathcal{A}'} := \{A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ ist σ -Algebra mit $\mathcal{E}' \subset \widetilde{\mathcal{A}'} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{A}'} = \mathcal{A}'$ (Good-Sets-Principle) $\Rightarrow f$ ist messbar, „ $\Rightarrow$ “: wg. $\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}'$, alternativ über Hilfssätze: (a) $f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ ist σ -Algebra über Ω (Urbild).

(b) $\{A' \subset \Omega' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ ist σ -Algebra über Ω' (max. $\mathcal{A}'$).

(c) $\mathcal{A}_\Omega(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathcal{A}_{\Omega'}(\mathcal{E}'))$ (Urbild $\leftrightarrow$ Erzeugung).

Satz: Sind $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ die offenen Mengen in $\Omega, \Omega', \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{O}), \mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mathcal{O}')$ und ist $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ stetig, dann ist f auch messbar. (Speziell $\Omega = \mathbb{R}^k, \Omega' = \mathbb{R}^n$)

Beweis: Bei stetigen Abbildungen ist das Urbild offener Mengen offen.

Bemerkung: f ist stückweise stetig $\Leftrightarrow f = \sum_{k=1}^m f_k 1_{A_k}$ mit $A_k \in \mathcal{A}, f_k$ stetig.

Satz: Mit $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ ist auch $f := (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ messbar.

Beweis ($n=2$): $f^{-1}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = f_1^{-1}((a_1, b_1]) \cap f_2^{-1}((a_2, b_2])$.

Beweis Folg. 5.1 (d): $f + g = h \circ (f, g)$ mit $h(x, y) := x + y$ (stetig), u.s.w..

Satz: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar $\Leftrightarrow \{f > a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$, ebenso für $\geq, <, \leq$.

Beweis Folg. 5.1 (e): f_n messbar $\Rightarrow \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{\sup_n f_n \leq a\} = \bigcap_n \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \sup_n f_n$ messbar,

$\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n), \lim_n f_n = \limsup_n f_n = \inf_n (\sup_{k \geq n} f_k)$.

C Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\overline{\mathbb{R}}$

„Erweitert reellwertige“ Funktionen. $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Die Borel- σ -Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$ ist $\overline{\mathbb{B}} := \mathcal{A}(\mathcal{G}_1 \cup \{\infty\})$.

Nicht definiert ist: $\infty - \infty, -\infty + \infty, \infty / \pm \infty, -\infty / \pm \infty$.