

Mathematische Stochastik

2.5 E Ergänzungen zu Abschnitt 2.5

A Bisher in Kapitel 2 behandelte Begriffe

Beobachtung $\omega \in$ Merkmalraum Ω , Ereignis $A \in$ Ereignis-System $\mathcal{A}$, Mengen-Operationen $\cup, \cap, \setminus, {}^c, +, \Delta$, $AB := A \cap B$, Indikatorfunktion 1_A , σ -Algebra, Erzeuger $\mathcal{E}$ (Skript-E), erzeugte σ -Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ (auch $\sigma(\mathcal{E})$), Borel- σ -Algebra $\mathbb{B} = \mathcal{A}(\mathcal{G}_1)$, Borel-Mengen in $\mathbb{R}$, n -dimensionale Intervalle $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, n -dimensionale Borel- σ -Algebra $\mathbb{B}^n = \mathcal{A}(\mathcal{G}_n)$, Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$.

B Ergänzungen zu $\mathbb{B}$

1. Zu den Borel-Mengen gehören alle endlichen Mengen, alle Intervalle, alle Halbgeraden sowie alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen.
2. Es gibt (beliebig) viele Erzeuger von $\mathbb{B}$, z.B.
die Systeme $\mathcal{G}_1^o$ und $\overline{\mathcal{G}}_1$ aller offenen bzw. abgeschlossenen Intervalle,
das System $\mathcal{J}_1$ aller Halbgeraden $(-\infty, a]$,
das System aller offenen Mengen $\mathcal{O}$.

Man zeigt: $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}(\mathcal{E}') \iff \mathcal{E} \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}') \text{ und } \mathcal{E}' \subset \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

Dazu braucht man: $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}') \text{ und } \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

C Ergänzungen zu $\mathbb{B}^n$

1. Zu den Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$ gehören alle endlichen Mengen, alle n -dim. Intervalle, alle Orthanten $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}$, sowie alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen.
2. Es gibt (beliebig) viele Erzeuger von $\mathbb{B}^n$, z.B.
die Systeme $\mathcal{G}_n^o$ und $\overline{\mathcal{G}}_n$ aller n -dimensionalen offenen bzw. abgeschlossenen Intervalle, das System $\mathcal{H}_n$ aller Halbräume $\{\mathbf{x} : x_i \leq a_i\}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$,
das System aller offenen Mengen $\mathcal{O}_n$.

D In Abschnitt 2.6 (neu) bzw. 5.1 (alt) behandelte Begriffe

Zufallsvariable, Zufallsgröße X (wählt aus, komprimiert, transformiert), durch X beschreibbares Ereignis $\{X \in A'\}$, auch $\{Y = c\}$, $\{W \neq 0\}$, $\{Z \leq k\}$, Messbarkeit für Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ mit σ -Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$:
 $\{X \in A'\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}' \iff \underline{\mathcal{A}(X)} := \{\{X \in A'\}, A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \underline{\mathcal{A}}$.
Bemerkung: $\mathcal{A}(X)$ spiegelt die in X enthaltene Information wider.