

Blatt 12

Übung 12.1 (3+2)

- (a) Beweisen Sie Korollar 2.8.9: Sei G eine endlich präsentierte Gruppe, $G = \langle S, R \rangle$. Dann gibt es einen wegzusammenhängenden Raum X mit $x_0 \in X$, so dass $\pi_1(X, x_0) \cong G$ gilt.
- (b) Veranschaulichen Sie Ihren Beweis, indem Sie topologischen Räume mit Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ angeben.

Übung 12.2 (3+2+1+2 Punkte)

Eine topologische Gruppe ist ein topologischer Raum (G, \mathcal{T}_G) mit stetigen Abbildungen $\mu: G \times G \rightarrow G$ und $(-)^{-1}: G \rightarrow G$, sowie einem ausgezeichneten Element $e \in G$ so, dass $(G, \mu, (-)^{-1}, e)$ eine Gruppe ist.

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ einer topologischen Gruppe G stets abelsch ist.

- (a) Zeigen Sie, dass die Gruppenstruktur von G eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(G, e)$ definiert, wobei das Produkt $[w].[v]$ als die Homotopieklasse des Weges $t \mapsto w(t).v(t)$ definiert ist.
- (b) Es sei X eine Menge mit zwei (nicht unbedingt assoziativen) unitalen Monoid-Strukturen $(X, \cdot, 1.)$ und $(X, *, 1_*)$. In anderen Worten, X hat zwei Produkte \cdot und $*$ mit Einheiten $1.$ und 1_* . Nehmen wir außerdem an, dass gilt

$$(x_0 \cdot x_1) * (y_0 \cdot y_1) = (x_0 * y_0) \cdot (x_1 * y_1) \quad \forall x_0, x_1, y_0, y_1 \in X.$$

Zeigen Sie, dass dann die beiden Monoid-Strukturen identisch sind. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Einheiten gleich sind.)

- (c) Zeigen Sie, dass \cdot und $*$ außerdem kommutativ sind.
- (d) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe stets abelsch ist.

Übung 12.3 (1+1+1+1 Punkte)

- (a) Zeigen Sie dass $(m, z) \mapsto 2^m z$ eine Wirkung von \mathbb{Z} auf dem topologischen Raum \mathbb{C} definiert.
- (b) Zeigen Sie, dass \mathbb{C}/\mathbb{Z} nicht Hausdorff ist.

- (c) Zeigen Sie, dass $(m, z) \mapsto 2^m z$ keine Überlagerungswirkung auf \mathbb{C} definiert.
- (d) Beschreiben Sie den Raum $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$.

Übung 12.4 (2+1 Punkte)

Sei $X = X_{0,0} \cup X_{0,2} \cup X_{2,0} \cup X_{0,-2} \cup X_{-2,0} \subset \mathbb{R}^2$, wobei $X_{a,b}$ ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt (a, b) ist.

- (a) Definieren Sie eine Überlagerungswirkung von \mathbb{Z}_4 auf X und beschreiben Sie den Quotienten X/\mathbb{Z}_4 .
- (b) * Finden Sie einen topologischen Raum Y mit einer Überlagerungswirkung von \mathbb{Z}_3 , so dass Y/\mathbb{Z}_3 ein Torus ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 18. Januar 2020.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.