Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2021/22

Blatt 11

Übung 11.1 (2+3+1 Punkte)

Benutzen Sie den Satz von Seifert-van Kampen, um Präsentierungen folgender Gruppen zu finden:

(a) die Fundamentalgruppe von $S^1 \vee S^2$,

(b) die Fundamentalgruppe des Torus (vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit einer anderen Methode, die Fundamentalgruppe des Torus auszurechnen),

(c) * die Fundamentalgruppe des Raumes aus Übungsaufgabe 4.1(c), also der Fläche von Geschlecht 2.

Übung 11.2 (4 Punkte)

Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1 und X_2 offen in X, wobei X_1, X_2 und $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend seien. Wähle $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$ von den Bildern von $\pi_1(X_1, x_0)$ und $\pi_1(X_2, x_0)$ erzeugt wird.

Benutzen Sie hierfür nicht den Satz von Seifert-van Kampen! Das Lebesgeuesche Lemma ist nützlich.

Übung 11.3 (2+1+1+2+2+2 Punkte)

Wir betrachten die Kreise $K_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ und $K_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Sei $K = K_1 \cup K_0$.

Wir betrachten außerdem $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0,\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$ und $L_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = 0,\ x_1^2 + x_3^2 = 1\}$. Dann ist $L = L_1 \cup L_2$ die Hopf-Verschlingung.

Wir betrachten auch die Einbettung $j : \mathbb{R}^n \subset S^3$ durch stereografishe Projektion, also $\mathbb{R}^n \cong S^3 \setminus N$.

Beschreiben Sie die folgenden Äquivalenzen. (Genaue Formeln sind nicht notwendig. Benutzen Sie Bilder!)

(a) $\mathbb{R}^3 \setminus K_1 \simeq S^1 \vee S^2$,

(b) $\mathbb{R}^3 \setminus K \simeq S^1 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^2$,

(c) $S^3 \setminus j(K) \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2$,

(d) $S^3 \setminus j(L) \simeq S^1 \times S^1$. (*Hinweis:* Verwenden Sie zuerst einen Selbsthomöomorphismus von S^3 um einen beliebigen Punkt P von L auf N abzubilden. Dann ist $S^3 \setminus j(L) \cong \mathbb{R}^3 \setminus (L \setminus \{P\})$. Untersuchen Sie nun diesen Raum.)

Weiterhin:

(e) Welche beiden Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden Sie, um zu zeigen, dass Ihre Bilder im ersten Teil der Aufgabe Homotopieäquivalenzen darstellen?

(f) Beweisen Sie, dass die Komplemente von K und L in S^3 nicht homöomorph sind.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 11. Januar 2020.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.