Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2019/20

Blatt 6

Übung 6.1 (1+2 Punkte)

Eine stetige Abbildung $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt *eigentlich*, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt ist.

(a) Geben sie (ohne Benutzung von b) ein Beispiel einer eigentlichen und einer nicht-eigentlichen Abbildung an.

Warnung: Die Literatur verlangt manchmal, dass f auch abgeschlossen ist. Das folgt automatisch aus unserer Definition von eigentlich, wenn X Hausdorff und Y lokal kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Hausdorff gilt, dass stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ eigentlich sind.

Übung 6.2 (1+1+1+2+1 Punkte)

Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung), ob die folgenden Räume kompakt sind.

(a) Sei X eine beliebige Menge mit der koendlichen Topologie.

(b) Sei $X = [0,1] \times [0,1] \setminus \{(1,1)\}$.

(c) Sei $X = A \amalg B$ wobei A ein beliebiger kompakter Raum ist und B ein beliebiger nicht kompakter Raum.

(d) Sei X ein endlicher CW-Komplex.

(e) * Sei $X = O(n)$ die Menge aller orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n^2}$ mit der Unterraumtopologie.

Übung 6.3 (4 Punkte)

Beweisen Sie direkt (ohne den Satz von Tychonoff zu zitieren und ohne die Verwendung von Filtern):

Das Produkt zweier nicht-leerer topologischer Räume ist genau dann kompakt, wenn jeder der Faktoren kompakt ist.

Hinweis: Beweisen Sie den Satz zuerst für offene Überdeckungen, die aus Basiselementen bestehen.

Übung 6.4 (1+1+2+1+1+1 Punkte)

Wir definieren die Cantormenge wie folgt: Sei $A_0 = [0,1]$. Für jede Menge I sei $T(I) = \frac{1}{3}(I \cup I+2) = \{x \mid \exists a \in I \text{ so dass } x = \frac{1}{3}a \text{ oder } \exists b \in I \text{ so dass } x = \frac{1}{3}(b+2)\}$. Dann sei $A_{i+1} = TA_i$. Insbesondere ist $TA_0 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

(a) Sei $C = \cap_{i=0}^{\infty} A_i$. Zeige dass sich jedes Element von C eindeutig schreiben lässt als $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ wobei $a_i \in \{0, 2\}$.

(b) Zeigen Sie, dass C kompakt ist.

(c) Konstruieren Sie eine stetige Bijektion f von C nach $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ und zeige, dass dies ein Homöomorphismus ist.

(d) Konstruieren Sie eine stetige Surjektion von C nach $[0,1]$.

(e) Zeigen Sie, dass C homöomorph zu $C \times C$ ist.

(f) * Folgern Sie, dass es eine stetige Surjektion $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ gibt. Kann es eine stetige Bijektion geben?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 26.11.2019.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.