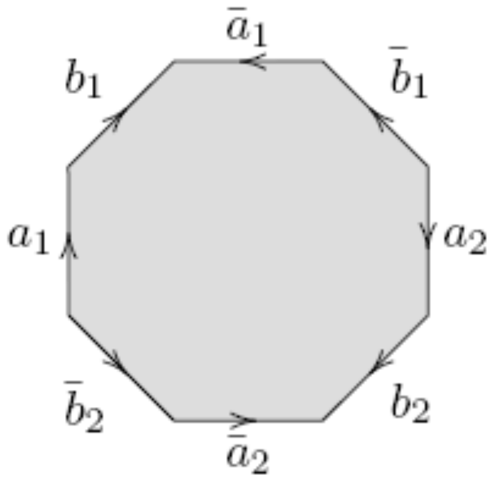
Blatt 4

Übung 4.1 (1+2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass $([0,1] \amalg [2,3])_{1\sim 2}$ homöomorph zu $[0,2]$ ist.

(b) Definiere eine Äquivalenzreaktion auf $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{eucl})$ durch $x \sim y$ genau dann wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Beschreiben Sie $\mathbb{R}/_{\sim}$.

(c) Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem regulären Achteck A, die die Seiten wie auf dem Bild identifiziert.



Skizziere einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der homöomorph zu $A/_{\sim}$ ist. (Aussagekräftige Skizzen sind ausreichend, es ist nicht notwendig, im Detail zu prüfen, dass ein Homöomorphismus vorliegt.)

Übung 4.2 (3 Punkte)

Es sei $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume.

Zeigen Sie, dass das topologische Produkt $X := \Pi_{i\in I} X_i$ genau dann Hausdorff ist, wenn jeder der Faktoren $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ Hausdorff ist.

Übung 4.3 (2+1+3+1 Punkte)

Es sei wie zuvor $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Wir nehmen an, dass die Topologien $\mathcal{T}_{X_i}$ nicht indiskret sind. Auf der Menge $X := \prod_{i\in I} X_i$ definieren wir eine Topologie, indem wir für eine Basis den "naiven" Produktansatz

$$\mathcal{B}_{\text{Box}} := \Big\{ \prod_{i\in I} U_i \,\Big|\, U_i \in \mathcal{T}_{X_i} \Big\}$$

verwenden.

(a) Überzeugen sie sich, dass $\mathcal{B}_{\text{Box}}$ die Basis einer Topologie auf X ist. Diese Topologie wird als *Boxtopologie* $\mathcal{T}_{\text{Box}}$ auf X bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{\text{Box}}$ feiner ist als die Produkttopologie $\mathcal{T}_X$, und dass $\mathcal{T}_{\text{Box}} = \mathcal{T}_X$ genau dann, wenn die Indexmenge I endlich ist.

(b) Wir nehmen nun an, dass die Indexmenge I nicht endlich ist. Überlegen Sie sich, dass die Projektionsabbildung $\text{pr}_i\colon (X, \mathcal{T}_{\text{Box}}) \to (X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ für jedes $i \in I$ stetig ist, und zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T}_{\text{Box}})$ nicht die universelle Eigenschaft der Initialtopologie bezüglich dieser Abbildungen erfüllt.

(c) Es sei nun $I = \mathbb{N}$ und $X_n = \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ die Menge der reellen Folgen. Es sei $X^+ := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_{>0} \subset X$ die Menge der positiven reellen Folgen, wobei $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}$ die Menge der positiven reellen Zahlen ist. Bezeichne mit $\hat{0} \in X$ das Element von X mit $\hat{0}_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $\hat{0}$ im Abschluss von X^+ liegt, sowohl bezüglich $\mathcal{T}_{\text{Box}}$, als auch bezüglich $\mathcal{T}_X$. Finden Sie eine Folge in $(X, \mathcal{T}_X)$, deren Folgenglieder aus X^+ sind, und die in $\mathcal{T}_X$ die gegen $\hat{0}$ konvergiert, aber nicht in $\mathcal{T}_{\text{Box}}$.

(d) * Beweisen Sie, dass es keine Folge in X^+ gibt, die in $(X, \mathcal{T}_{\text{Box}})$ gegen $\hat{0} \in X$ konvergiert, und folgern Sie, dass $(X, \mathcal{T}_{\text{Box}})$ nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Übung 4.4 (2+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{S}^1)^n$ eine Mannigfaltigkeit ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^n$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 12.11.2019.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.