Blatt 8

Übung 8.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die jordansche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & -1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Übung 8.2 (10 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{R})$$

Finden Sie die jordansche Normalform von A, die dazugehörige Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^5$ und alle Haupträume.

Übung 8.3 (3 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ und nehmen Sie an, Sie haben S gefunden, so dass

$$SAS^{-1} = J = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimen Sie eine Formel für A^m an die für jedes $m \geq 0$ gilt (und nur eine konstante Anzahl von Matrixmultiplikationen benötigt).

Übung 8.4 (2 Punkte)

Erfülle die Matrix $M \in M(n \times n, \mathbb{C})$ die Gleichung $M^k = E_n$ für irgendein k. Zeigen Sie, dass M diagonalisierbar ist.

Übung 8.5 (2 + 1 Punkte)

Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V mit $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$. Zeigen Sie, dass es eine Basis gibt, so dass $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ alle diagonalen Einträge gleich 0 hat. *Hinweis:* Finden Sie v so dass $v, f(v)$ linear unabhängig sind und wenden Sie dann Induktion an.

* Zeigen Sie, dass es $g, h \in \mathrm{End}_K(V)$ gibt mit $f = gh - hg$.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 3.6.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.