Blatt 13

Übung 13.1 (12 Punkte)

Finden Sie eine Orthonormalbases aus Eigenvektoren für die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}i\sqrt{2} & 0 \\ \frac{2}{3}i\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{3}i \\ 0 & \frac{1}{3}i & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$$

Geben Sie eine Basiswechselmatrix an, die die symmetrische Bilinearform, die von A dargestellt wird in eine Diagonalmatrix mit Einträgen 1, -1 oder 0 transformiert.

Übung 13.2 (6 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit innerem Produkt. Wir definieren für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ den Wert $||f|| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ als $\max\{||f(x)|| \mid x \in V \text{ mit } ||x|| = 1\}$.

1. Sei f normal. Zeigen Sie, dass $||f||$ gleich dem größten Betrag eines Eigenwerts von f ist.
2. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass $||f||$ größer sein kann als der größte Betrag eines Eigenwertes von f, wenn f nicht normal ist.
3. Zeigen Sie, dass für $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Übung 13.3 (5 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $SU(2) = \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = E_2 \text{ und } \det(A) = 1\}$.

Wir schreiben $A \in SU(2)$ als $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Drücken Sie c und d als Funktionen von a und b aus.

Finden Sie eine Relation, die a und b erfüllen müssen.

Zeigen Sie, dass es eine natürlich Bijektion zwischen Elementen von $SU(2)$ und Punkten in $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid ||x|| = 1\}$ gibt (wobei $|| - ||$ die Norm für das euklidische Standardskalarprodukt bezeichnet).

Übung 13.4 (6 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum mit innerem Produkt und seien f, g selbstadjungiert in $\mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass f und g kommutieren, wenn $\langle fg(v), v\rangle = \langle gf(v), v\rangle$ für alle $v \in V$.

Übung 13.5 (1 Punkt)

* Seien $x_1, \dots, x_n$ reelle Zahlen so dass $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ und $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ gilt. Was ist der größte Wert, den $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1$ annehmen kann?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 8.7.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.