Julian Holstein

Blatt 11

Übung 11.1 (5 Punkte)

Welche dieser Matrizen sind kongruent über $\mathbb{C}$, über $\mathbb{R}$, und über $\mathbb{F}_2$?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Übung 11.2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Signatur folgender quadratischer Formen:

1. $2xy$ auf $\mathbb{R}^2$.
2. $xy + yz + xz$ auf $\mathbb{R}^3$.
3. $2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz)$ auf $\mathbb{R}^3$.
4. $A \mapsto \text{Tr}\,(A^2)$ auf $M(n \times n, \mathbb{R})$

.

Übung 11.3 (6 Punkte)

1. Sei q eine quadratische Form auf einem reellen Vektorraum V mit geordeneter Basis $\mathcal{B}$ und sei $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta_q)$ die darstellende Matrix. Nehmen Sie an, dass A diagonalisierbar ist und nur reelle Eigenwerte hat.

   Sei e_+ die Anzahl der positiven und e_- die Anzahl der negativen Eigenwerte von A und sei e_0 die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0.

   Zeigen Sie, dass (e_+, e_-, e_0) die Signatur von q ist.

2. Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Angenommen, sie wissen jeweils ob $\det(A)$ und $\text{Tr}\,(A)$ positiv, negativ oder 0 sind. Was können Sie in jedem der neun Fälle über die Signatur aussagen?

3. Bestimmen Sie die Signatur der Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A_{ij} = 1 - \delta ij$.

Übung 11.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass h jeweils eine Sesquilinearform ist. Ist h hermitesch?

- Für $a, b \in \mathbb{C}^2$ sei $h(a, b) = a_1\overline{b_2} - a_2\overline{b_1}$.
- Sei $V = \mathbb{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$ die Menge aller komplex-wertigen stetigen Funktionen auf $[-1, 1]$. Für $f, g \in V$ sei $h(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Übung 11.5 (1 Punkt)

* Wir betrachten die symmetrische Bilinearform $q(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ auf $\mathbb{C}^n$. Beschreiben Sie geometrisch die Menge M aller Punkte in $\mathbb{C}^n$ für die $q(z) = 1$. Was ändert sich, wenn Sie $q(z) = s$ für verschiedene Werte $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachten?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 24.6.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.