Blatt 10

Übung 10.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $U, W \leq V$ gilt:

1. $U \leq W$ genau wenn $W^0 \leq U^0$.
2. $U = V$ genau wenn $U^0 = 0$
3. $U = \{v \in V \mid \phi(v) = 0 \text{ für alle } \varphi \in U^0\}$ für V endlich-dimensional.

Übung 10.2 (9 Punkte)

1. Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ definieren wir $\beta(v, w) = v_1(w_2 + w_3) + (v_2 + v_3)w_2$. Ist β eine Bilinearform? Wenn ja, bestimmen Sie eine darstellende Matrix und ihren Rang.
2. Für $v, w \in \mathbb{C}^4$ definieren wir $\beta(v, w) = v_1 v_2 + w_1 w_2 + v_3 w_3 - v_4 w_4$. Ist β eine Bilinearform? Wenn ja, bestimmen Sie eine darstellende Matrix und ihren Rang.
3. Wir betrachten für $v, w \in K^2$, $\beta(v, w) = \det(\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix})$. Prüfen Sie, dass β eine Bilinearform ist. Ist β ausgeartet? Ist β symmetrisch, schiefsymmetrisch oder weder noch? Finden Sie die darstellende Matrix.
4. Sei P_2 der Vektorraum aller Polynome von Grad höchstens 2. Wir definieren die Bilinearform $\beta(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$ für $p, q \in P_2$.

   Bestimmen Sie eine darstellende Matrix P_3 und prüfen Sie, ob β ausgeartet ist.
5. Für A, B in $M(n \times n, K)$ definieren wir $\beta(A, B) = \text{Tr}\,(AB)$. Zeigen Sie, dass dies eine Bilinearform definiert. Ist sie ausgeartet?

Übung 10.3 (3 Punkte)

Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ sei $\beta(v, w) = 2v_1 w_1 + 3v_2 w_2 + 3v_3 w_3 - v_2 w_3 - v_3 w_2$.

Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ gleich der Einheitsmatrix ist.

Übung 10.4 (3 Punkte)

Geben Sie fünf Matrizen in $M(5 \times 5, \mathbb{R})$ an, die nicht kongruent sind.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 17.6.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.