



Kontrolle leitfähiger Fluide mit Methoden der mathematischen Optimierung

Regelung und Optimalsteuerung von Strömungen mit wandnahen Lorentzkraften

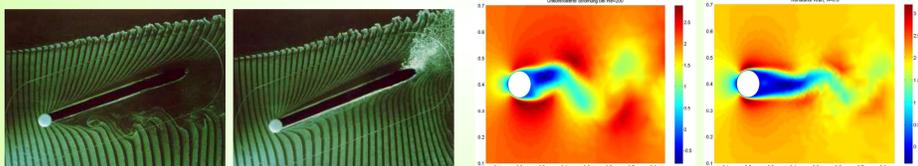
Michael Hinze und Olivier Pfeiffer



Institut für Numerische Mathematik

Motivation

Die Beeinflussung leitfähiger Fluide mittels Lorentzkraft ist möglich. Bisher werden in Experimenten und numerischen Simulationen zur Unterdrückung von Strömungsablösung und/oder zur Stabilisierung von Strömungen Lorentzkraftverteilungen entweder konstant oder zeitlich periodisch angesetzt.



Dabei wird die Feldstärke und/oder die Periode i.d.R. a-priori als bekannt vorausgesetzt. Hier sollen Methoden vorgestellt werden, welche es erlauben, die energetisch günstigsten Parameter, und allgemeiner, **maßgeschneiderte** Lorentzkraften, zu bestimmen.

Mathematische Modellierung

Fluid mit Lorentzkraft: Instationäre Navier-Stokes Gleichungen mit wandnaher Volumenkraft Bu , welche die Lorentzkraft modelliert.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} + (y \cdot \nabla)y - \nu \Delta y + \nabla p &= Bu \quad \text{in } Q = (0, T) \times \Omega, \\ -\operatorname{div} y &= 0 \quad \text{in } Q, \\ y(t, \cdot) &= y_d \quad \text{auf } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0, \cdot) &= y_0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Die schwache Kopplung von Strömung und Magnetfeld erlaubt die externe Berechnung der Lorentzkraft. Letztere fällt exponentiell in die Strömung ab. Ansatz:

$$Bu(t, x) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \vec{F}_i e^{-\frac{x}{a} \operatorname{dist}(x, \text{Zylinderoberfläche})}, \quad (1)$$

wobei a eine geometrische Größe bezeichnet (den Elektrodenabstand im Experiment) und \vec{F}_i Vektorfelder darstellen, in deren Richtungen die Lorentzkraft wirkt. Zeitlich variable Kontrollmöglichkeiten sind über die Amplituden $u_i(t)$ gegeben.

Kontrollprobleme:

1. Zu gegebenem Zustand z (welcher etwa *geringen Strömungswiderstand* hat), finde Amplituden u , Strömung $y = y(u)$ und Druck $p = p(u)$, so daß

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |y - z|^2 dx dt + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |y(T) - z(T)|^2 dx dt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T |u|^2 dt \quad (2)$$

minimal wird.

2. Verhindere Rückströmung auf der Zylinderoberfläche:

$$\frac{1}{4} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \partial_n(y \cdot \tau) \eta_2 (|\partial_n(y \cdot \tau) \eta_2| - \partial_n(y \cdot \tau) \eta_2) dO dt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T |u|^2 dt. \quad (3)$$

3. Minimiere Drag auf dem Zylinder (d Zylinderdurchmesser, $\rho = 1$ Dichte):

$$c_d(y, p) = \frac{2}{\rho d U^2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \rho \nu \partial_n(y \cdot \tau) \eta_2 - p \eta_1 dO dt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T |u|^2 dt. \quad (4)$$

Methoden:

- **Optimalsteuerung:** Finde Steuerstrategie $u(t)$ derart, daß das Kontrollziel erreicht wird (Unterdrückung der Wirbelstraße). Dazu sollte z eine Strömung mit geringem Strömungswiderstand sein.
- **Geschlossene Regelkreise:** Finde ein Regelgesetz $u = K(y)$, welches die Strömung aus dem Anfangszustand in den Zustand z überführt.

Kooperationen extern

- Optimalsteuerung: Kunisch (Graz), Tröltzsch (SFB 557), Bärwolff (Berlin)
- Numerische Analysis: Deckelnick (Magdeburg)
- Optimierungsmethoden: Hintermüller (Graz)

Kooperationen SFB intern

- Grenzschichtkontrolle, Strömungsregelung: A1, C2
- Mehrphasen-Kontrollprobleme: A2, B2, B5, B6
- Numerische Methoden: A1, A6, C1

Ziele

Langfristig: Entwicklung maßgeschneiderter Kontrollmöglichkeiten für elektromagnetisch beeinflussbare Fluide

Mittelfristig: Entwicklung mathematischer Strategien zur gezielten Auslegung elektromagnetischer Kräfte für die instationären Navier-Stokes Gleichungen

Kurzfristig: Experimentnahe Umströmungskontrolle schwach leitfähiger Fluide am Beispiel des Kreiszyinders.

Resultate

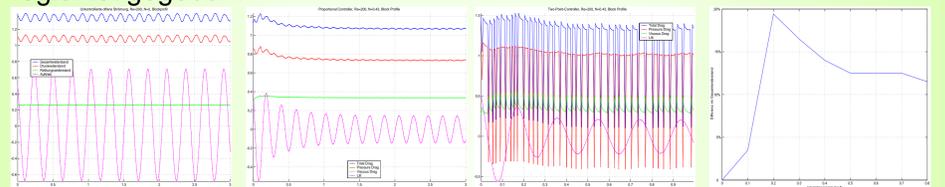
Kontrolle der Kreiszyklumströmung im offenen Kanal, laminares Regime. Ansatz für die Lorentzkraft wie in (1) mit $i = 1$, $a = 1/10$ und

$$\vec{F}_1(x) := \begin{cases} 1, & \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1 \\ -1, & \pi + \phi_0 \leq \phi \leq \pi + \phi_1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \vec{t},$$

wobei $x = r e^{i\phi}$ mit auf den Kreiszyklum bezogenen Polarkoordinaten. Nachfolgend numerische Resultate für $\phi_0 = \pi/18$, $\phi_1 = 17\pi/18$. Diskretisierung im Ort mit Taylor-Hood FEM, Zeitintegration semi-implizit, bzw. mit Zwischenschritt- θ -Schema.

1. Zweipunkt- und Proportionalregler, Re=200:

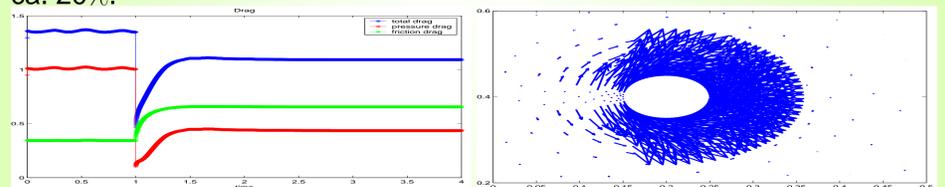
Der Zweipunktregler aktiviert die Lorentzkraft mit vorgegebener Feldstärke, falls in einem Winkel von 10° um den hinteren Staupunkt wandnahe Rückströmung detektiert wird. Der Proportionalregler stellt die Lorentzkraft proportional zur rückwärtig überströmten Fläche ein. Beide Regler unterdrücken Ausbildung der Wirbelstraße und reduzieren den Gesamtwiderstand (Bilder Mitte). Experimentelle Implementierbarkeit für den Zweipunktregler ist gegeben.



Für kleine Interaktionsparameter ist die Widerstandsreduktion bei der Zweipunktregelung größer, als bei zeitlich konstanter Kraft, weil der Druckwiderstand unmittelbar nach dem Einschalten rapide absinkt (Bild rechts).

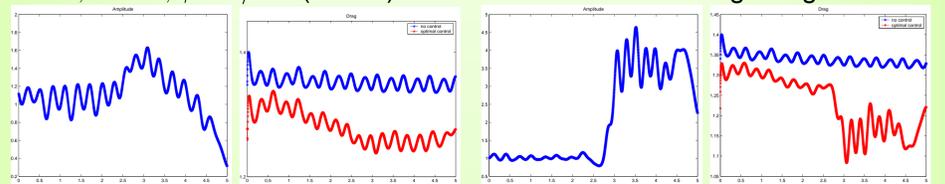
2. Instantane Kontrolle (Momentansteuerung), Re=100:

Minimierung einer instantanen Version von (4), wobei nur der Reibungsanteil des Widerstands minimiert wird. Aus der Optimierung resultiert eine konstante Lorentzkraft mit Interaktionsparameter $N = 1.075$. Regelbeginn bei $t = 1$ (Bild links) mit Lorentzkraft aus Bild rechts, Widerstandsreduktion ca. 20%.



3. Optimalsteuerung, Re=100:

Minimiert wird das Funktional (2) für $T = 5$ und Zielströmung z zu $N = 1$. Bilder zeigen den zeitlichen Verlauf der Amplituden ($N(t) \approx du(t)$) zusammen mit dem Widerstand für $\alpha = 0, \delta = 1, \gamma = 1/100$ (links) und $\alpha = 1, \delta = 10, \gamma = 1/100$ (rechts). Gesamtwiderstandsverringern ca. 10%.



4. Verschiedenes:

- **Algorithmik:** Globalisierungsstrategien für Newton- und SQP-Verfahren, Aktive Mengen Strategien für kontrollrestringierte Probleme, optimale und adaptive Checkpointing Techniken zur Speicherplatzreduktion, jeweils mit Anwendung auf Steuerung des Navier-Stokes Systems.
- **Numerische Analysis:** Fehlerabschätzungen für Optimallösungen von (2), Entwicklung eines neuartigen Diskretisierungskonzepts für den kontrollrestringierten Fall, ink. optimaler Fehlerabschätzungen.