Prof. Dr. M. Hinze WS 2007/2008

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis
Blatt 8
Abgabetermin: 07.01.2008 vor der Übung

Aufgabe 1: (4 Punkte) Seien X, Y Banach Räume, $A : X \to Y$ und $B' : Y' \to X'$ linear mit

$$\langle B'y', x\rangle_{X',X} := \langle y', Ax\rangle_{Y',Y} \text{ für alle } x \in X, y' \in Y'.$$

Weisen Sie $A \in L(X, Y)$ und $B' \in L(Y', X')$ nach.

Aufgabe 2: (4 Punkte) (Trennungssatz im Hilbert Raum, abgeschlossener linearer Teilraum). Sei X Hilbert Raum, $Y \subset X$ abgeschlossener Teilraum, $x_0 \in X \setminus Y$. Konstruieren Sie $x' \in X'$ mit

$$x'_{|Y} = 0, \quad \|x'\|_{X'} = 1 \text{ und } \langle x', x_0\rangle_{X',X} = dist(x_0, Y).$$

Geben Sie den Riesz–Repräsentanten von x' an.

Aufgabe 3: (4 Punkte) (Trennungssatz im Hilbert Raum, abgeschlossene konvexe Teilmenge). Sei X Hilbert Raum, $M \subset X$ abgeschlossen und konvex, $x_0 \in X \setminus M$. Konstruieren Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x' \in X'$ mit

$$\Re\langle x', x_0\rangle_{X',X} > \alpha \text{ und } \Re\langle x', x\rangle_{X',X} \le \alpha \text{ für alle } x \in M.$$

Geben Sie den Riesz–Repräsentanten von x' an.

Aufgabe 4: (4 Punkte (1+1+2)) ($l^\infty(\mathbb{R})' \neq l^1(\mathbb{R})$) Sei

$$X = \left\{ x \in l^\infty(\mathbb{R}); \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ existiert} \right\}.$$

a) Begründen Sie, dass X ein Unterraum von $l^\infty(\mathbb{R})$ ist.

b) Zeigen Sie, dass der Mittelwert-Operator $x \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ linear und stetig ist auf X und eine stetige Fortsetzung auf $l^\infty(\mathbb{R})$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : l^1(\mathbb{R}) \to l^\infty(\mathbb{R})', \quad \langle T(y), x\rangle_{l^\infty(\mathbb{R})', l^\infty(\mathbb{R})} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

linear, stetig, isometrisch, nicht aber surjektiv ist.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch nach 2008