



Kontrolle leitfähiger Fluide mit Methoden der mathematischen Optimierung

Modellprädiktive Kontrolle und Optimalsteuerung der Boussinesq Approximation

Michael Hinze und Ulrich Matthes

Motivation

In vielen Kristallzüchtungsprozessen hat die Ausprägung der Strömung maßgeblichen Einfluss auf die Qualität des Züchtungsergebnisses. Ein gutes mathematisches Modell für Strömungen in Kristallschmelzen stellt die Boussinesq Approximation der Navier Stokes Gleichungen dar. Mit Hilfe dieses Modells wird zunächst untersucht, welchen Einfluss

- verteilte Kräfte (elektromagnetische Kräfte, Lorentz-Kräfte),
- verteilte (induktive) Heizung und
- Randtemperaturverläufe

auf die Strömung haben. Anschließend werden die Eingriffsmöglichkeiten maßgeschneidert mit der Zielstellung, die Strömung so einzustellen, dass die Qualität des Resultats des Züchtungsprozesses möglichst hoch ist. Verwendete Methoden sind

- Momentansteuerung, modellprädiktive Verfahren und
- Optimalsteuerung.

Mathematische Modellierung

Mathematisches Modell:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + \nabla p &= -(y \nabla) y - \tau \gamma g + u_F && \text{in } Q = (0, T) \times \Omega, \\ -\operatorname{div} y &= 0 && \text{in } Q, \\ y|_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Sigma = (0, T) \times \Gamma, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - a \Delta \tau &= -(y \nabla) \tau + u_Q && \text{in } Q, \\ \partial_{\eta} \tau &= \alpha (u - \tau|_{\Gamma}) && \text{auf } \Sigma \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $\tau(0) = \tau_0$.

Eingriff über

- Randtemperatur u ,
- verteilte Heizung u_Q ,
- verteilte Kraft u_F .

Mathematische Modellierung des Züchtungsziels als Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} \min J(y, \tau, u, u_F, u_Q) &= \int_0^T \frac{c_0}{2} \int_{\Omega} (y - z)^2 dx + \frac{c_1}{2} \int_{\Omega} (\tau - S)^2 dx \\ &+ \frac{c_2}{2} \int_{\Gamma} u^2 dx + \frac{c_3}{2} \int_{\Omega} u_F^2 dx + \frac{c_4}{2} \int_{\Omega} u_Q^2 dx dt \end{aligned}$$

wobei z gewünschter Strömungszustand und S gewünschter Temperaturzustand sind.

Der erste Teil des Kostenfunktionals bewertet die Abweichung vom Kontrollziel, der zweite die Kontrollkosten (aktive Kontrolle!).

Diskretisierung:

- Ort: Finite Differenzen auf versetztem Gitter, FEM
- Zeit: Semi-implizites Euler-Verfahren

Kooperation: Prof. Dr. G. Bärwolff, IfM, TU Berlin

Literatur:

- U. Matthes, Instantane Kontrolle der Boussinesq-Approximation, Diplomarbeit, TU Dresden, 2003
- M. Hinze & U. Matthes, Model Predictive Control of the Boussinesq Approximation, Preprint Math-NM-02-04, TU Dresden, 2004

Ziele

Langfristig: Steuerung der Kristallisation in komplexen Systemen (Strömung, Magnetfeld, Strahlung, etc.)

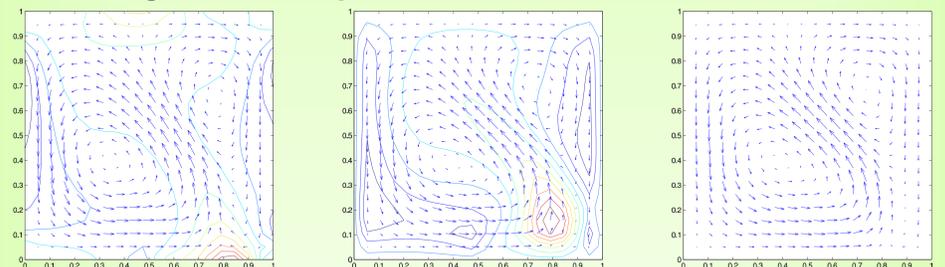
Mittelfristig: Optimale Steuerung und Kontrolle von Strömungen mit freien Rändern

Gegenwärtig: Steuerung der Boussinesq-Approximation

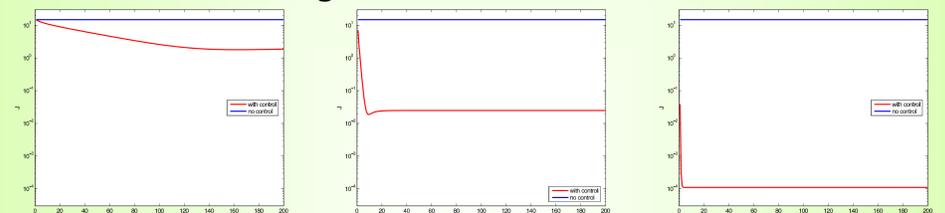
Resultate

Anfangswerte bei $t = 0$ sind $y \equiv 0$ und $\tau \equiv 0$. Steuerung durch instantane Kontrolle (als Spezialfall der modellprädiktiven Kontrolle) über Randtemperatur(links), verteilte Heizung(mitte) oder verteilte Kraft(rechts).

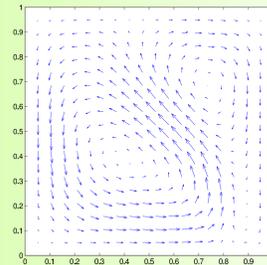
Strömungen und Temperaturverläufe



Zeitliche Entwicklung der Kostenfunktionale



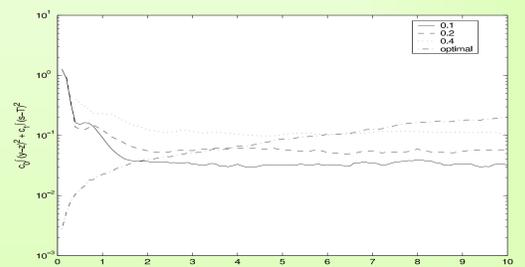
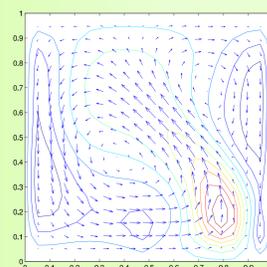
Zielzustand



Diskussion: Beginnend mit $(y, \tau) \equiv 0$ wird mit allen drei Eingriffsmöglichkeiten der Zielzustand (z, S) nahezu erreicht. Erwartungsgemäß liefert die Steuerung mit verteilter Kraft das beste Resultat, gefolgt von verteilter Heizung und Randtemperatursteuerung.

Nachfahren einer Optimalsteuerung unter Störungen

Eine Optimalsteuerung y^*, τ^* wird als Zielzustand für die instantane Kontrolle mit verteilter Heizung genutzt. Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld werden zufällig gestört (in der Größenordnung der Steuerung bei $t \approx 3.5$). Mit instantaner Kontrolle gelingt es, den Zustand der ungestörten Optimalsteuerung y^*, τ^* nachzufahren, was mit der ungestörten Optimalsteuerung angewendet auf das gestörte System nicht gelingt.



Kontrollierte Strömung(links), Abstand zum ungestörten optimalen Zustand y^*, τ^* in der L^2 -Norm.