

**Teilprojekt: A4**  
**Leiter: M. Hinze**

## **Kontrolle leitfähiger Fluide mit Methoden der mathematischen Optimierung**

M. Hinze, O. Pfeiffer

Fachrichtung Mathematik  
Institut für Numerische Mathematik, TU Dresden

### **1 Einleitung**

#### **1.1 Ausgangsfragenstellungen**

Im Mittelpunkt der ersten Projektphase stand die Entwicklung von Kontrollmöglichkeiten für leitfähige Fluide, insbesondere schwach leitfähiger Fluide. Die Zielstellung umfasste dabei aus Sicht des Wissenschaftlichen Rechnens

- die Implementierung von experimentnahen numerischen Methoden zur Simulationen der Zylinderumströmung unter Einfluss von wandnahen Lorentzkräften,
- die Entwicklung von experimentnahen energieminimalen Steuer- und Regelkonzepten für die zweidimensionale Zylinderumströmung unter Verwendung von wandnahen Lorentzkräften,
- der Entwurf von Kontrollmechanismen für die Boussinesq Approximation auf der Basis Modell-Prädiktiver Verfahren,
- die Entwicklung von optimalen Checkpointing Techniken für Speicherplatz-intensive Optimierungsprobleme, und
- Modellreduktion der 3-dimensionalen Zylinderumströmung mit anschließender Kontrolle,

sowie aus analytischer Sicht

- Modellierung von Kontrollproblemen mit leitfähigen Fluiden,
- Entwicklung von geeigneten numerischen Verfahren inkl. Konvergenzuntersuchungen, und
- Entwicklung von geeigneten Diskretisierungstechniken, insbesondere für Aufgabenstellungen mit Kontrollrestriktionen.

Die Arbeiten zur Modellreduktion bei der Zylinderumströmung sind wegen Personalmangels nicht aufgenommen worden. Es findet allerdings in diesem Bereich im Rahmen einer Diplomarbeit gegenwärtig eine enge Zusammenarbeit mit dem Teilprojekt A1 statt. Die im TP A1 durchgeführten Simulationsdaten werden gegenwärtig einer Eigenmodenanalyse unterzogen mit der Zielstellung, die kohärenten Strukturen in der Strömung zu identifizieren. Daran anschließend wird eine Modellreduktion durchgeführt und das reduzierte System gegen die vollständige Simulation validiert.

Die vom Antragsteller entwickelten Methoden und Programmcodes zur Momentansteuerung (Instantane bzw. Modell-Prädiktive Kontrolle) der Zylinderumströmung wurden dem Teilprojekt C7 des SFB 557 zur Verfügung gestellt und sind in einer Kooperation auf kontrollrestringierte Aufgabenstellungen erweitert worden [1,2].

## 1.2 Kenntnisstand bei der letzten Antragstellung

Bei Antragstellung waren die einschlägigen mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Arbeiten im Bereich der Kontrollen von Strömungen bekannt. Aus mathematischer Sicht sind hier die Arbeitsgruppen um Temam [3,4] in Indiana/Paris Sud, um Gunzburger in Florida [5-8], um Glowinski [9,10] in Houston und um Kunisch in Graz [11-13] zu nennen.

Aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht sind zu nennen die Gruppen um Moin und Bewley in Stanford und San Diego [14-18], um Choi und Kim in Seoul und Los Angeles [19-23], um Collis [24,25] in Rice und um Koumoutsakos [26,27] in Zürich.

Die eigenen Vorarbeiten umfassten die numerische Implementierung suboptimaler Kontrollstrategien für laminare Strömungen, insbesondere Modell-Prädiktiver Verfahren wie instantaner Kontrolle [11,12,28,29,30], Kontrolle mittels Modellreduktion [12,31], sowie Entwurf und Analyse von angepassten numerischen Verfahren für die Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen [32,33].

## 2 Angewandte Methoden

### 2.1 Mathematisches Modell

Strömungen schwach leitfähiger, inkompressibler Fluide können mit den instationären Navier-Stokes Gleichungen mathematisch modelliert werden. Elektromagnetisch leitfähige Fluide sind gekennzeichnet durch die magnetische Reynoldszahl  $Re_m$ , deren Größe für schwach leitfähige Fluide in der Größenordnung  $Re_m = O(10^{-5})$  liegt. Wirken auf das Fluid elektromagnetische Kräfte, können diese wegen der geringen Kopplung zwischen Strömung, Magnetfeld und elektrischen Feld als externe Volumenkraft modelliert werden. Als mathematisches Modell für die Strömung schwach leitfähiger inkompressibler Fluide bei Wirkung einer Lorentzkraft  $F_L$  können daher die instationären Navier-Stokes-Gleichungen mit Volumenkraft  $F_L$  verwendet werden:

$$\begin{aligned} \vec{y}_t - \nu \Delta \vec{y} + (\vec{y} \cdot \nabla) \vec{y} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= F_L \text{ in } Q := (0, T) \times \Omega, \\ -\operatorname{div} \vec{y} &= 0 \text{ in } Q, \\ \vec{y}(0) &= \vec{y}^0 \text{ in } \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei bezeichnen  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$  die Geschwindigkeit,  $p$  den Druck,  $\nu$  die kinematische Viskosität,  $\rho$  die konstante Dichte,  $T$  den Zeithorizont und  $\Omega$  das durchströmte Gebiet. Wird die Lorentzkraft über Aktuatoren (Magnete und Elektroden, vergl. Bild 1) über die Wand in die Strömung eingebracht, wirkt sie nur wandnah und fällt exponentiell in die Strömung ab [23]. Daher wird für die Lorentzkraft im Folgenden der Ansatz

$$F_L(u) = \sum_{i=1}^n u_i(t) f_i(x) =: Bu \quad (2)$$

verwendet, wobei  $f_i(x) := e^{-\pi/a \cdot \operatorname{dist}(x, x_i)}$ , und  $x_i, i=1, \dots, n$  die auf der Zylinderoberfläche zur Verfügung stehenden Elektroden bezeichnen. Der Vektor  $u_i(t) = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, u_i^{(3)})^T$  modelliert dabei die Amplituden der Lorentzkraft und dient als Steuergröße, mit dem das System etwa maßgeschneidert werden kann. Ferner bezeichnet  $a$  den Abstand zwischen Elektroden und Magneten. Als Kontrollziel dient die möglichst energieminimale Reduktion der Widerstandskraft

$F_D$ , welche eine komponentenweise Darstellung der Form

$$F_D = F_{D_f} + F_{D_p} + F_{D_{em}}$$

zulässt mit

$$F_{D_f} = \int_{\partial \text{Zyl.}} \rho v \frac{1}{2} \eta \cdot (\nabla y + (\nabla y)') \cdot e_1 dS, \quad F_{D_p} = \int_{\partial \text{Zyl.}} p \eta e_1 dS \quad (3)$$

und

$$F_{D_f} = J_0 B_0 \frac{a}{\pi} d (\cos \phi_0 - \cos \phi_1).$$

Das Kontrollziel kann dabei auf verschiedenen Wegen erreicht werden. Entweder direkt durch Minimierung der Widerstandskraft  $F_D = F_D(y, p)$  als Funktion von Geschwindigkeitskomponenten und Druck, oder indirekt, etwa durch Ansteuern eines Strömungszustands, welcher in der untersuchten Konfiguration bekanntermaßen einen kleineren Gesamtwiderstand als die zu untersuchende Strömung aufweist. Weil der Kontrolleingriff mit Lorentzkräften aktiv ist, müssen dessen Kosten im mathematischen Modell mit modelliert werden. Da das zeitliche Mittel des Energieeintrags in die Strömung proportional zum zeitlichen Mittel der Amplituden angenommen werden kann, kann der Energieeintrag in die Strömung etwa mit Hilfe des Terms

$$\beta \int_0^T |u(t)|^2 dt, \quad (4)$$

bewertet werden, wobei das positive Gewicht  $\beta$  die Energiekosten wichtet.

In (3) bezeichnet  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor und  $\eta$  die nach außen gerichtete Normale auf der Zylinderoberfläche. Die den einzelnen Komponenten zugeordneten Widerstandskoeffizienten sind gegeben durch

$$C_D = \frac{2 F_D}{\rho U^2 d}, \quad C_{D_f} = \frac{2 F_{D_f}}{\rho U^2 d}, \quad C_{D_p} = \frac{2 F_{D_p}}{\rho U^2 d}, \quad C_{D_{em}} = \frac{2 F_{D_{em}}}{\rho U^2 d}.$$

Aus mathematischer Sicht handelt es sich bei der Minimierung von (3)+(4) unter der Nebenbedingung (1) insgesamt um ein Optimalsteuerungsproblem der Form

$$\begin{aligned} & \min J(y, p, u) \\ & \text{bei } e(y, p, u) = 0, \quad u \in U_{ad}, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei mit der Forderung  $u \in U_{ad}$  z.B. auch noch punktweise Kontrollbeschränkungen berücksichtigt werden können. Eine präziser funktionalanalytischer Rahmen für die Aufgabenstellung (5) kann etwa den Ausführungen in [32,34,35,54] entnommen werden.

Ein Ausgangspunkt der Arbeiten des Teilprojekts waren Aufgabenstellungen der Form (5). Hierfür wurden und werden Fragestellungen zur Optimalsteuerung und Modell-Prädiktiver Kontrolle untersucht, sowie entsprechende Algorithmen numerisch implementiert. Dabei wurde neben den instationären Navier-Stokes Gleichungen auch bereits die Boussinesq Approximation als strömungsmechanisches Modell verwendet.

Daneben bildete die Entwicklung und numerische Implementierung von Lorentzkraft-basierten experimentnahen Steuer- und Regelkonzepten für den umströmten Zylinder den Schwerpunkt der Arbeiten von Olivier Pfeiffer. Diese Arbeiten fanden in enger Abstimmung mit dem Teilprojekt C2 statt, insbesondere in Hinblick auf die Modellierung von Strömungen, welche mit Lorentzkräften beeinflusst werden und unter Vorgabe der experimentell realisierbaren Konfigurationen bei der Zylinderumströmung. Die dabei erzielten Resultate werden ausführlich

diskutiert, alle weiteren Ergebnisse dagegen nur skizziert.

## 2.2 Analysis und Algorithmen für die Optimierung strömungsmechanischer Probleme

Zunächst folgt in Stichpunkten eine kurze Zusammenfassung von Arbeiten, welche im Rahmen von TP A4 entstanden sind und in engem Zusammenhang mit den Fragestellungen des SFBs stehen.

- Probleme der Form (5) ohne Kontrollschranken wurden vom Antragsteller und Kunisch in [32] ausführlich als restringierte Optimierungsprobleme untersucht. Neben anderen Dingen wurden dort hinreichende Optimalitätsbedingungen 2ter Ordnung formuliert und mit deren Hilfe schnelle Konvergenz exakter und inexakter Newton-Verfahren bewiesen.
- Globalisierungsstrategien für Newton- und SQP-Verfahren im Zusammenhang mit Problem (5) werden von Hintermüller und dem Antragsteller in [33] untersucht und erfolgreich numerisch implementiert.
- Die in [32] erzielten Resultate sind vom Antragsteller zusammen mit Hintermüller in [34] im Rahmen aktiver Mengen Strategien auf den kontrollrestringierten Fall erweitert und numerisch implementiert worden. Die Verquickung der iterativen Löser (SQP, aktive Mengen Strategie und CG) auf den verschiedenen Ebenen stellt dabei eine besondere Herausforderung dar.
- Fehlerabschätzungen für diskrete Lösungen von (5) werden erstmals von Deckelnick und dem Antragsteller in [36,37] bewiesen,
- ein neuartiges Diskretisierungskonzept für den kontrollrestringierten Fall wird vom Antragsteller in [38] diskutiert. Insbesondere werden bei dem Zugang Kontrollen implizit durch die Projektion der Lagrange-Multiplikatoren auf die zulässige Menge diskretisiert. Neben anderen Dingen erlaubt der Zugang den Beweis von Fehlerabschätzungen optimaler Ordnung.
- Optimale [39] und adaptive Checkpointing Strategien [40] werden vom Antragsteller zusammen mit Walther bzw. Sternberg untersucht. Diese Strategien sind insbesondere dann von Bedeutung, wenn der Zeithorizont für die Berechnung der Steuerungen groß oder a-priori nicht bekannt ist.
- Modell-Prädiktive Kontrollmethoden für die Boussinesq Approximation werden vom Antragsteller und Matthes in [41]. Die Boussinesq Approximation stellt eine Modellerweiterung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen dar, in welcher thermische Konvektion mit modelliert und Dichteunterschiede über einen temperaturbedingten Auftriebsterm berücksichtigt werden.
- Für die örtlich 3dimensionale Boussinesq Approximation werden von Bärwolff und dem Antragsteller optimale Randtemperatursteuerungen in [42] numerisch berechnet. Die Berechnungen in diesem Fall sind zeitlich sehr aufwendig und erfordern den Einsatz von Höchstleistungsrechnern. Verglichen mit den Resultaten in [43] wird deutlich, daß mit Methoden, welche Adjungierteninformation in der Gradientenberechnung benutzen, bessere Optimallösungen zu erreichen sind.

### 2.3 Experimentnahe Beeinflussung und Regelung der Zylinderumströmung mit Lorentzkraften

In Anlehnung an die Arbeit von Berger & al. [23] und Grundmann und Posdziech [44] wird die wandnahe Lorentzkraft im Folgenden angesetzt in der Form

$$F_L(\vec{x}) = J_0 B_0 g(\phi) e^{-\pi/a \cdot \text{dist}[\vec{x}, \text{Zylinderoberfläche}]},$$

wobei

$$g(\phi) := \begin{cases} 1, & \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1 \\ -1 & \pi + \phi_0 \leq \phi \leq \pi + \phi_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist stets sichergestellt, daß die Kraft in Strömungsrichtung und nur an der tatsächlich aktuierten Fläche des Zylinders tangential in Strömungsrichtung wirkt.  $a$  Bezeichnet hier den Elektroden-/Magnetenabstand,  $J_0$  die Stromdichte,  $B_0$  die magnetische Induktion an der Oberfläche und  $t$  den Tangentialvektor an die Zylinderoberfläche.

Wie in Kapitel 2.1 beschrieben, wirkt die Lorentzkraft auch hier als äußere Kraft in den Navier-Stokes-Gleichungen (1), wobei der Faktor  $J_0 B_0$  die Rolle der Amplitude übernimmt.

Es sei bemerkt, daß durch Änderung der geometrischen Anordnung der Aktuatoren (siehe Bild 1) die Richtung der Lorentzkraft verändert werden kann [23].

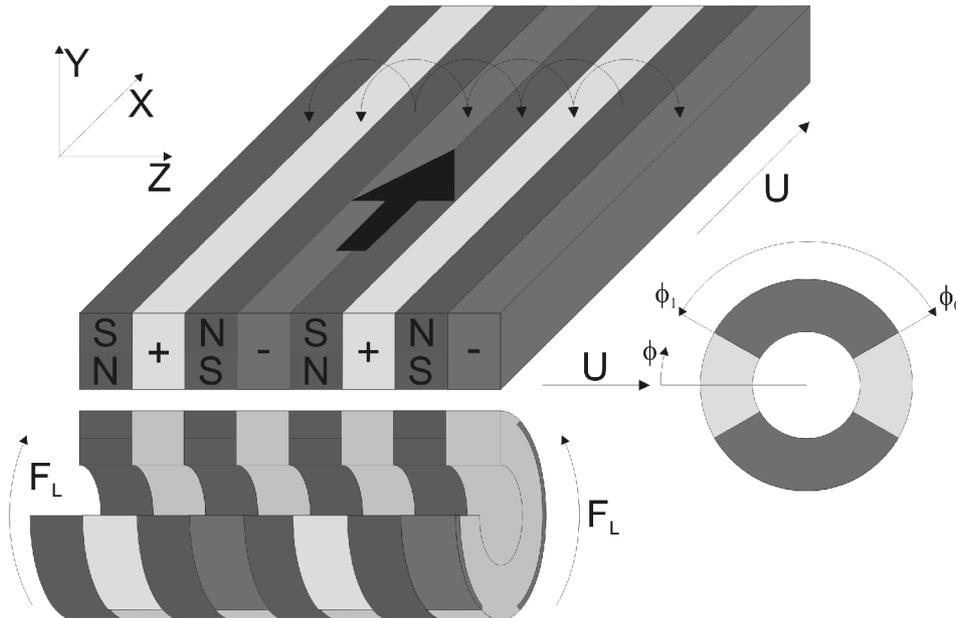


Bild 1: Bei den Berechnungen verwendete Aktuator-Konfiguration

Da die Lorentzkraft  $F_L$  als externe Kraft in das mathematische Modell eingeht, kann sie im Kontext der der Kontrolle als Steuer- oder Regelgröße zum Maßschneiden der Strömung verwendet werden.

Die nachfolgend dargestellten numerischen Resultate beziehen sich auf das laminare Regime ( $Re \leq 200$ ). Mit dem Zylinderdurchmesser  $d$ , der Einströmgeschwindigkeit  $U$  und der

konstanten (kinematischen) Viskosität  $\nu$  ist die Reynoldszahl dabei durch

$$Re = \frac{U d}{\nu}$$

bestimmt. Der Interaktionsparameter  $N$  ist definiert durch

$$N = \frac{J_0 B_0 d}{\rho U^2}$$

und beschreibt das Verhältnis der Trägheitskräfte in der Strömung und der Lorentzkraft.

In der zur numerischen Simulation verwendeten Konfiguration (Bild 4) dient ein Blockprofil als Einströmgeschwindigkeit, d.m.  $y_1 = U, y_2 = 0$  an den oberen und unteren Wänden. Auf der Zylinderoberfläche sind no-slip Bedingungen vorgeschrieben.

Das Kontrollziel besteht in der Reduktion der Widerstandskraft  $F_D$  aus (3).

Die Abhängigkeit der Widerstandskoeffizienten von der Reynoldszahl für die unkontrollierte Strömung ist in Bild 2 dargestellt.

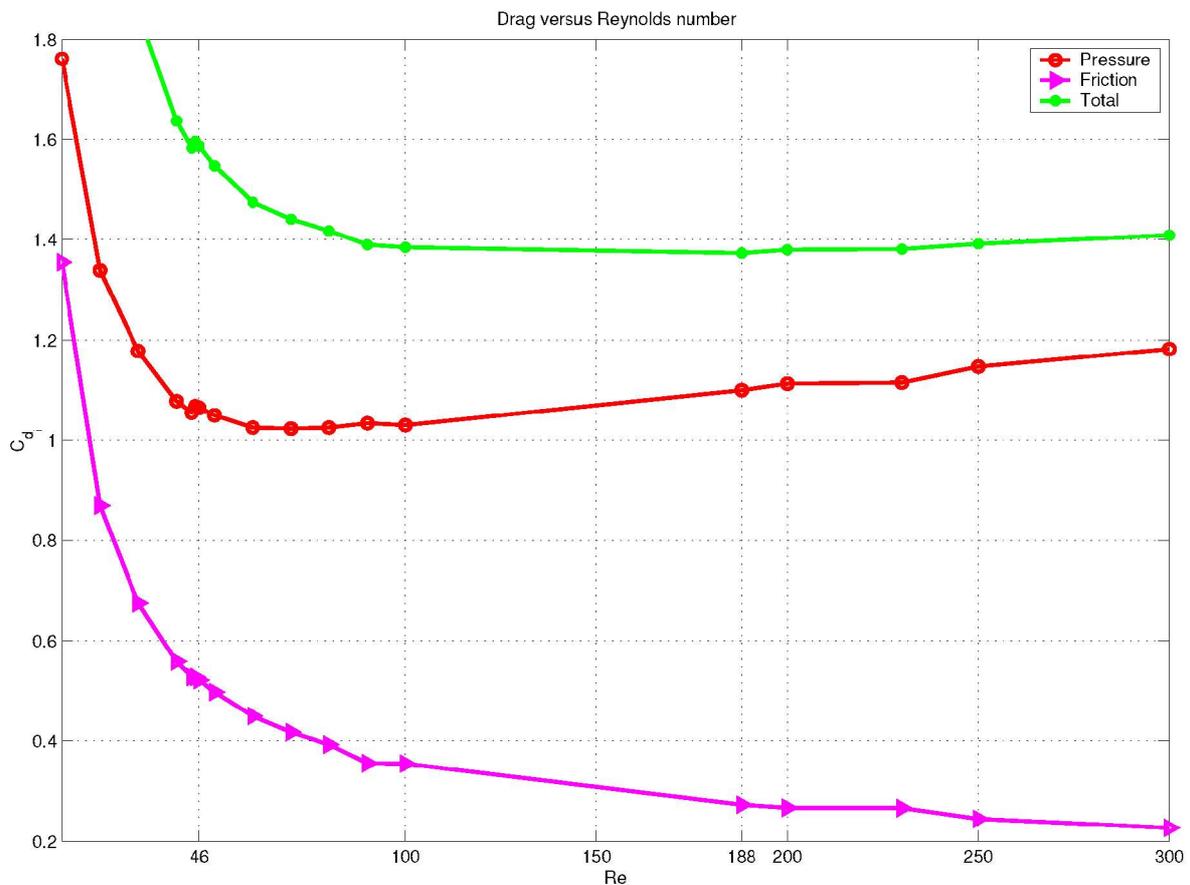


Bild 2: Abhängigkeit der Widerstandskoeffizienten von der Reynoldszahl

Bei kleinen Reynoldszahlen (hier im Bereich  $Re \leq 46$ ) ist die Zylinderumströmung stabil und symmetrisch gegen ihre Mittelachse. Schon bei  $Re \approx 10$  löst die Strömung von der Zylinderoberfläche ab und bildet ein stationäres Wirbelpaar im Nachlauf des Zylinders. Bei einer Reynoldszahl  $> 46$  setzt Wirbelablösung ein, was zur Ausbildung der von Kármánschen Wirbelstraße führt. Ab der Reynoldszahl  $Re \approx 188$  wird die Strömung dreidimensional. Die hier abgebildeten Werte sind jedoch alle für ein zweidimensionales Modell berechnet. Es ist zu erkennen, daß der Druckwiderstandsbeiwert bis zur Ausbildung der Wirbelablösung abfällt um danach wieder anzusteigen. Der Reibungswiderstandsbeiwert fällt dabei unabhängig vom Regime monoton ab, beginnend mit  $Re \approx 150$  reicht die Minderung des Reibungswiderstandsbeiwertes jedoch nicht mehr aus, um das Ansteigen des Gesamtwiderstandsbeiwertes zu verhindern. Die erzielten numerischen Resultate decken sich mit den Ausführungen von Henderson in [45], wo auch eine ausführliche Diskussion von Bild 2 zu finden ist.

Eine ständig wirkende Lorentzkraft ist ein geeignetes Mittel um die Wirbelablösung zu unterdrücken und den Gesamtwiderstand zu reduzieren (siehe Bild 3). Es stellt sich jedoch die Frage, ob es Möglichkeiten gibt, die Wirbelablösung und die Reduktion des Gesamtwiderstandes energieeffizienter zu realisieren, also mit geringerem Lorentzrafteinsatz für jenen die gleiche, oder besser noch eine größere Reduktion zu erreichen. Konzepte aus der Regelungstechnik bieten sich hier an, wie im Folgenden vorgestellt wird.

Verschiedene Ansätze zur Unterdrückung der Wirbelablösung und zur Reduktion des Gesamtwiderstands basierend auf den Einsatz von Lorentzkräften sind gegeben durch

- konstanten Krafteinsatz, welcher wie bereits beschrieben ohne viel a-priori Wissen funktioniert, aber, wie sich zeigen wird, im Hinblick auf den Energieverbrauch anderen Methoden unterlegen ist,
- zeitperiodischen Krafteinsatz mit oszillierenden Lorentzkräften [46,47], mit welchem die Wirbelablösung zu geringeren Kosten verhindert werden kann als beim konstanten Krafteinsatz, dafür jedoch viel a-priori Wissen benötigt wird. So muss etwa die Reynoldszahl bekannt sein, um zufriedenstellende Ergebnisse erzielen zu können,
- den Einsatz von Zweipunkt- und Proportionalreglern. Mit diesem Ansatz ist es möglich, ohne viel a-priori Wissen über das Verhalten der Strömung eine experimentnahe Regelung numerisch zu implementieren, welche die Energiekosten senkt,
- Modell-Prädiktive Verfahren, Instantane Kontrolle und Methoden der Optimalsteuerung. Im Rahmen Modell-Prädiktiver Verfahren werden auf kurzen Zeithorizonten Optimierungsprobleme der Form (5) formuliert und näherungsweise numerisch gelöst. Diese Methode erlaubt eine Interpretation als geschlossener Regelkreis [29,30] und lässt erwarten, daß die instantanen Kontrolleingriffe wegen des im Kostenfunktional auftretenden Terms (4) energieminimal sind. Es ist bekannt, daß die so gewonnenes Regler bei Einschalten zu starken Überschwingen führen können. Dieser Effekt tritt auch bei den gegenwärtig durchgeführten Arbeiten auf und es stellt sich heraus, daß die verwendeten numerischen Strömungslöser sehr sensitiv auf plötzlich auftretende, sehr starke Lorentzkräfte reagieren. Mit Hilfe von Optimalsteuerungen lässt sich die Wirbelablösung unterdrücken, vergleiche Bild 8. Dieses Ziel wird dort dadurch erreicht, daß im zeitlich-örtlichen Mittel der zeitlichen Mittelwert der unkontrollierten Strömung in einem kleinen Bereich hinter dem Zylinder durch Anwendung von Lorentzkräften angesteuert wird.

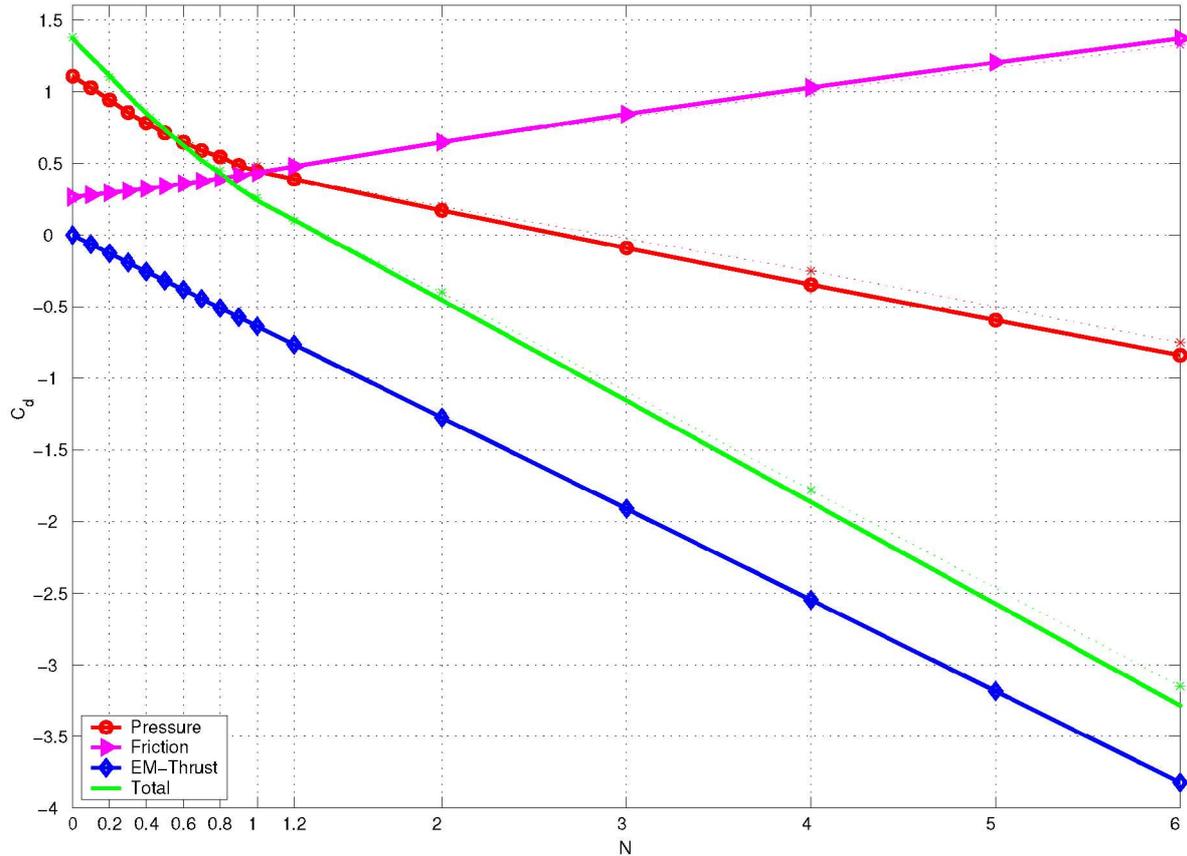


Bild 3: Abhängigkeit der Widerstandskoeffizienten vom Interaktionsparameter  $N$  bei  $Re=200$

In Bild 3 sind die Widerstandsbeiwerte  $C_{d_p}$ ,  $C_{d_f}$ ,  $C_{d_{em}}$  und ihre Summe  $C_d$  in Abhängigkeit vom Interaktionsparameter  $N$  bei  $Re=200$  dargestellt. Alle Widerstandsbeiwerte verringern sich bei größer werdendem Interaktionsparameter außer dem Reibungswiderstandskoeffizient, der sich vergrößert. Der Verlauf des Gesamtwiderstandes ist nahezu affin linear, hat jedoch bei  $N \approx 1$  einen Knick, der ungefähr den Übergang von der instationären zur stationären Strömung markiert. Bei  $N \approx 1.3$  wird der Gesamtwiderstand negativ. Das bedeutet, daß ein elektromagnetischer Schub induziert wird. Der für die Strömungskontrolle relevante Bereich ist also der bis zu einem Interaktionsparameter  $N < 1.3$ .

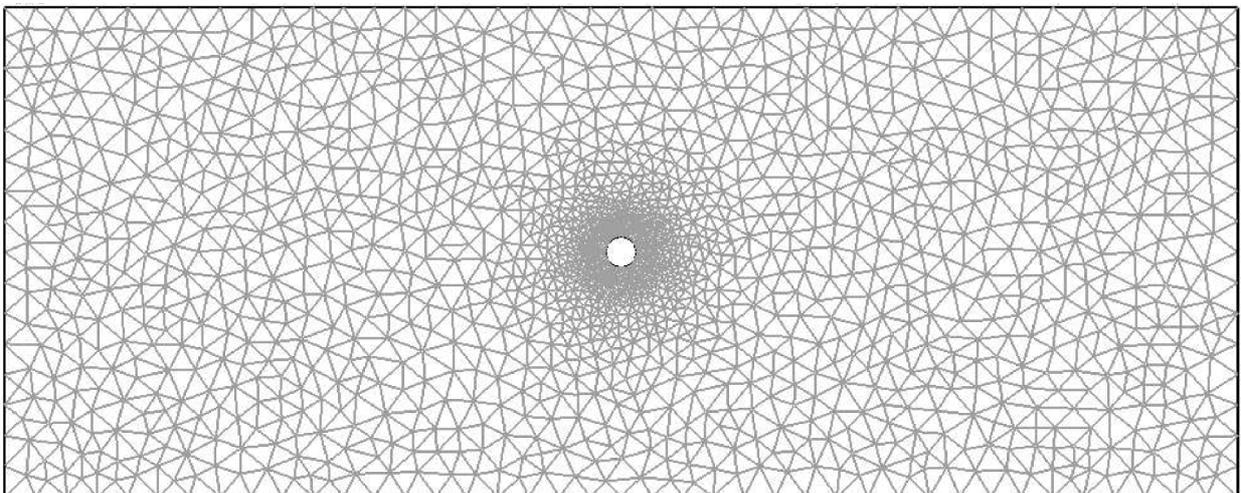


Bild 4: Rechengitter zur offenen Kreisumströmung (11.000 Elemente)

### 2.4.1 Zweipunktregler

Der implementierte Zweipunktregler misst das Vorzeichen der  $y_1$ -Komponente der Strömungsgeschwindigkeit an zwei Punkten nahe der Zylinderoberfläche an dem hinteren Staupunkt in einem Sektor von  $10^\circ$ . Findet Rückströmung an einem dieser Punkte statt, werden die Elektroden aktiviert, bis sich die Strömungsrichtung dort wieder umkehrt. Numerisch sind dabei in jedem Zeitschritt nur zwei Abfragen auf der Lösung zu realisieren. Der Aufbau dieses Reglers ist angelehnt an die Ausführungen von Chen in [50].

### 2.4.2 Proportionalregler

Der zweite implementierte Regler, schaltet ähnlich zum ersten, die Lorentzkraft ein, falls eine Rückströmung hinter der Zylinderwand gemessen wird. Im Unterschied zum Zweipunktregler hängt die Amplitude der Lorentzkraft jetzt auch proportional von dem Winkel ab, den der am weitesten stromaufwärts gelegene Gitterpunkt, an welchem Rückströmung vorliegt, mit dem Äquator des Zylinders einschließt (siehe dazu Bild 5). Je näher die Rückströmung an einem der beiden Pole detektiert wird, desto größer ist die Amplitude der Lorentzkraft.

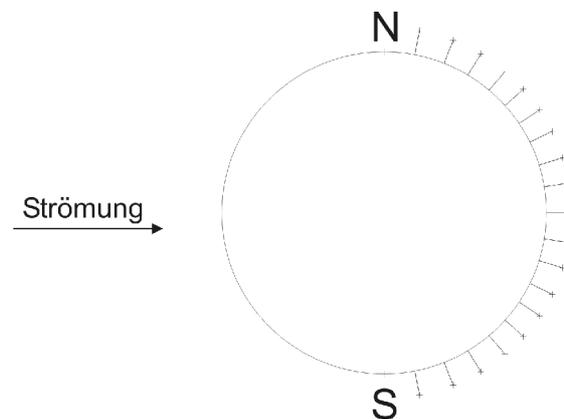


Bild 5: Schematische Darstellung des Proportionalreglers (N bzw. S bezeichnen den geograph. Nord- bzw. Südpol) Aus experimenteller Sicht können in Teilprojekt C2 Geschwindigkeitsmessungen nur an bis zu drei Punkten im Nachlauf des Zylinders durchgeführt werden, ohne die Strömung zu stark zu beeinflussen. Vor diesem Hintergrund wird in Hinblick auf die experimentelle Implementierbarkeit nur der Zweipunktregler aus Abschnitt 2.4.1 weiter untersucht, da die Implementierung des in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Proportionalreglers zu viele Geschwindigkeitsmessungen erfordern würde.

## 3 Ergebnisse und ihre Bedeutung

### 3.1 Methodische Arbeiten

**Diskretisierungstechniken** sind für die numerische Berechnung von Kontrollen von zentraler Bedeutung. Die Feinheit der zugrundeliegenden Diskretisierung muss dabei vor dem Hintergrund der enormen Komplexität der Aufgabenstellung so fein wie nötig, jedoch so grob wie möglich gewählt werden. In [38] wird dabei vom Antragsteller ein Konzept vorgeschlagen, welches insbesondere auch im Fall von Kontrollrestriktionen, dieser Prämisse bestens gerecht wird. Die Diskretisierung der Steuergrößen wird bei dem Zugang implizit durch jene der adjungierten Variablen realisiert, der kontinuierliche Projektor auf den zulässigen Bereich wird  $U_{ad}$  jedoch nicht diskretisiert, sondern dessen Anwendung auf die diskrete Adjungierte etwa im Fall von

Boxschränken, exakt realisiert. Auf diese Weise erhaltenen diskrete Kontrolle sind dann etwa bei Verwendung von Finten Elementen nicht mehr direkt mit dem Gitter verquickt. In Bild 6 ist ein Finte-Element Gitter zusammen mit aktiven Mengen für ein elliptisches Kontrollpraxis mit Boxschränken dargestellt. Die fetten glatten äußeren Linien stellen die exakte Aktive Menge dar, die fetten glatten inneren jene mit dem neuartigen Diskretisierungskonzept erhaltenen und die fetten gezackten Linien bilden den Rand der aktiven Menge, falls ein linearer Ansatz für die Steuergrößen verwendet wird. Es wird ersichtlich, daß der neuartige Zugang schon auf sehr groben Gittern sehr gute Approximationen liefert und dem herkömmlichen Konzept klar überlegen ist. Details zur Methode und zur numerischen Umsetzung sind in [38] enthalten.

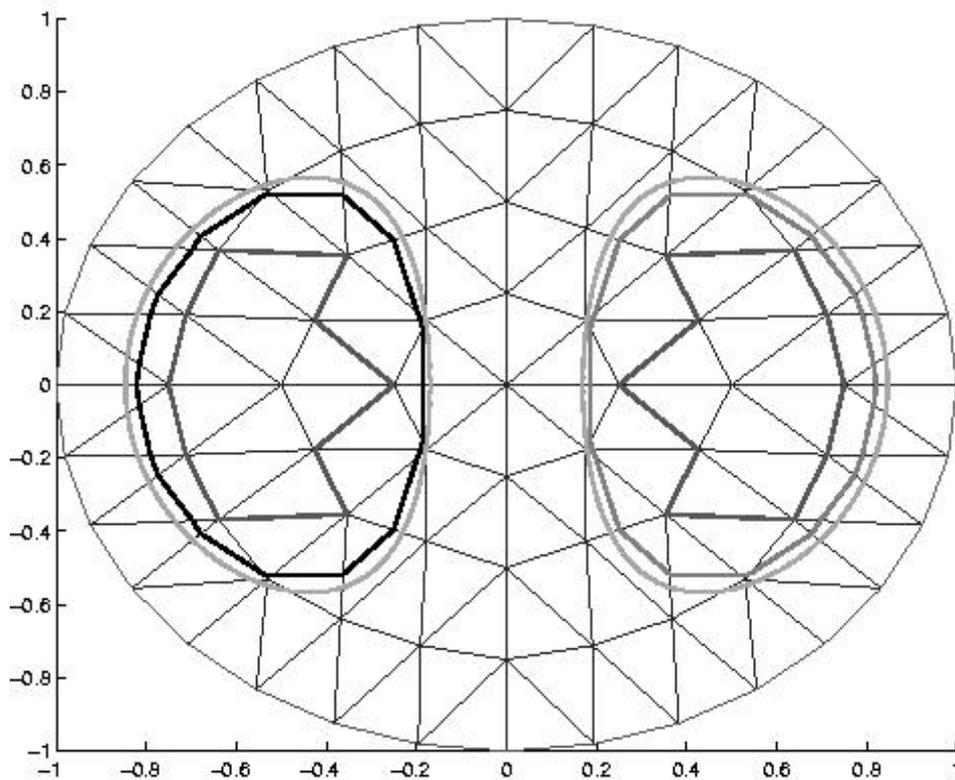


Bild 6: Vergleich von diskreten Aktiven Mengen

**Optimalsteuerungen** für komplexe Strömungen können mit den heute zur Verfügung stehenden Rechnerressourcen nur mit großem Zeitaufwand numerisch berechnet werden. Ihre direkte Verwendung in technischen Systemen ist nur dann sinnvoll, wenn das gesteuerte System frei von äußeren Einflüssen ist. Wirken jedoch Störungen auf das System, kann mittels eines geschlossenen Regelkreises versucht werden, die optimale Trajektorie anzufahren. Eine mögliche Anwendung dieser Methode liegt etwa in der Ansteuerung von a-priori berechneten optimalen Temperatursteuertrajektorien in Kristallzüchtungsprozessen. Im Rahmen der ersten Projektphase wurde und wird dieses Szenario am Beispiel der Boussinesq Approximation untersucht, mittels derer etwa die Strömung in einer Kristallschmelze beschrieben werden kann.

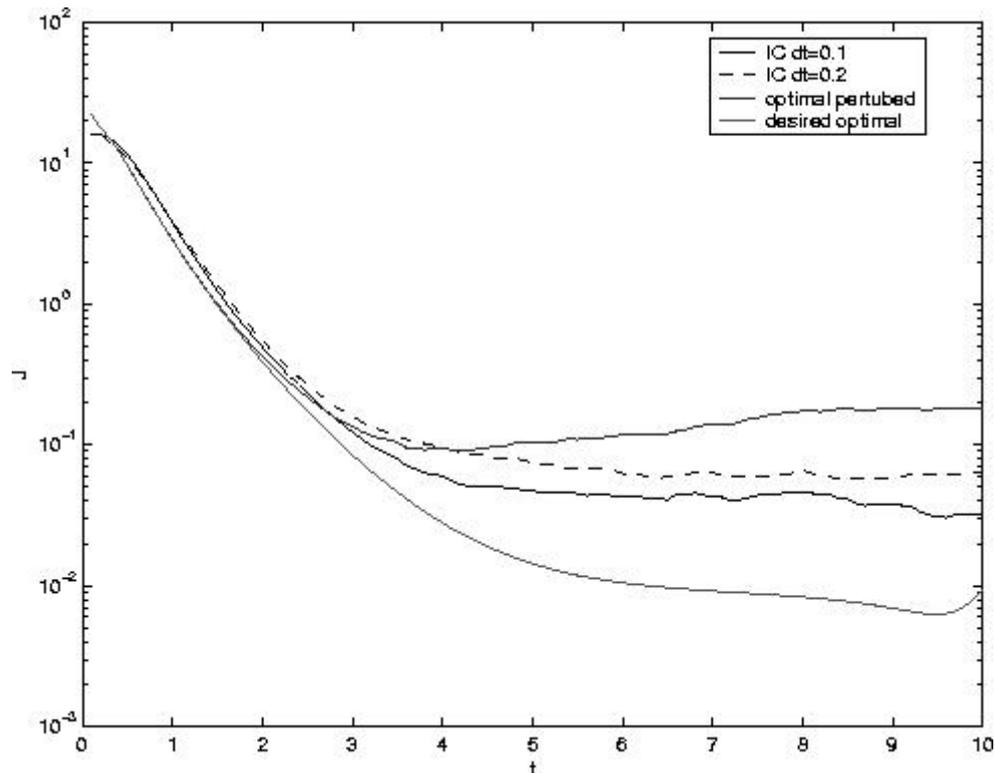


Bild 7: Kostenverläufe von Optimalsteuerungen

In Bild 7 ist der Kostenverlauf über der Zeit für eine solche Situation skizziert. Die untere durchgezogene Linie beschreibt jenen der ungestörten Trajektorie, die obere den für ein verrauschtes System. Die mittleren Trajektorien zeigen den mittels instantaner Kontrolle nachgeregelten Kostenverlauf des verrauschten Systems für 2 verschiedene Schrittweiten. Details sind in [41] zu finden.

Der Einsatz von Optimalsteuerungen im Rahmen der Kontrolle schwach leitfähiger Fluide ist nur von theoretischen Interesse. Jedoch zeigt sich mit diesem Zugang, welche Möglichkeiten sich durch den nicht intrusiven Eingriff mit Feldern eröffnen. In Bild 8 ist der Kostenverlauf einer Optimalsteuerung dargestellt (oben un-, unten kontrolliert), wobei das Kontrollziel darin bestand, den zeitlichen Mittelwert der unkontrollierten Strömung in im Nachlauf des Zylinders im zeitlichen Mittel anzufahren. Es wurden in Anlehnung an die Realisierungsmöglichkeiten von experimenteller Seite 2 Aktuatoren implementiert, jeweils einer auf der Ober- und einer auf der Unterseite des Zylinders. In (2) wurde dabei  $a=10$  gewählt, das verwendete Rechengebiet ist in Bild 4 dargestellt. Die optimale Steuerung simuliert dabei einen sich rotierenden Zylinder (dieser wird allerdings mechanisch nicht bewegt). Dieses Resultat ist nach den Darstellungen in [48] zu erwarten. Dort wird die Wirbelstraße durch Zylinderrotation unterdrückt. Der Schnapsschuss einer typischen wandparallelen Lorentzkraft ist in Bild 9 dargestellt.

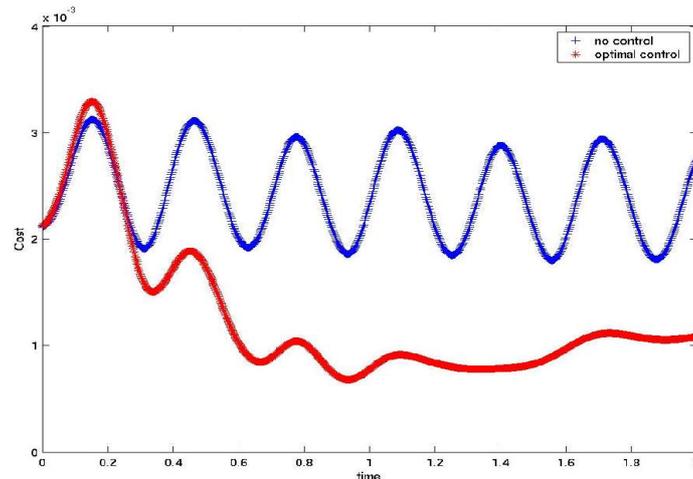


Bild 8: Kostenverläufe mit und ohne Lorentzkraft

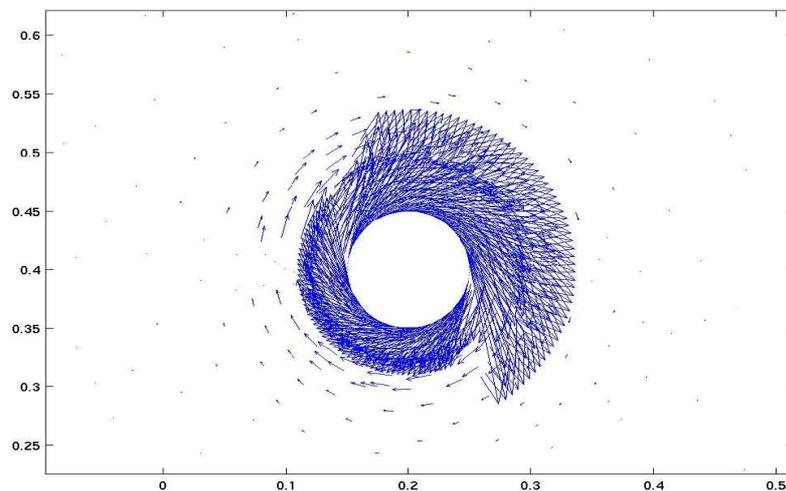


Bild 9: Instantaner Schnappschuss einer Lorentzkraft

Mit der Hilfe von Optimalsteuerungen ist es sicherlich möglich, den energetisch optimalen Einsatz von Lorentzkräften zu prognostizieren, in der Praxis jedoch sind eher Regelkonzepte von Bedeutung, hier insbesondere Modell-Prädiktive Verfahren und als Spezialfall die oben bereits erwähnte instantane Kontrolle. Sind genügend Messungen vorhanden, können diese Methoden je nach Art der Implementierung in Echtzeit maßgeschneiderte Kontrollen für das zu steuernde System bereitstellen und sind daher aus der Sicht der Anwendung mittelfristig diejenigen der Wahl. Allerdings wird deren Implementierung am Experiment gegenüber klassischen Regelkonzepten mit einem sehr viel höherem Aufwand verbunden sein.

### Checkpointing und Automatisches Differenzieren

In ihrer optimalen Variante für äquidistante Zeitgitter ermöglicht Checkpointing bei der Berechnung von Adjungierten die Reduktion des Speicherplatzbedarfs um zwei Größenordnungen, wobei sich die benötigte Rechenzeit lediglich verdoppelt [39]. Sind die Gitter nicht mehr äquidistant und ist die Länge des Zeithorizonts nicht mehr konstant, können adaptive Techniken eingesetzt werden, deren Laufzeiten auch bei variablen Schrittkosten ein ähnliche Speicherplatzreduktion bei Verdopplung der Rechenzeit erzielen wie die o.g. optimale Variante

[40]. Diese Methoden werden daher bei der Berechnung von Sensitivitäten bei komplexen dreidimensionalen strömungsmechanischen Problemstellungen eine wesentliche Rolle spielen. Das gilt auch für das Automatische Differenzieren. Mit dieser Methode kann auf der Grundlage von existierenden Computer Programmen Sensitivitätsinformation gewonnen werden. Mittlerweile liegen die Laufzeiten von automatisch generierten Programmen im Bereich von handcodierten Methoden, wie mittlerweile durchgeführte Vergleiche belegen [49].  
Nachfolgend werden ausführlich numerische Ergebnisse für die in 2.4.1 und 2.4.2 beschriebenen Proportionalregler diskutiert, welche eine Wirbelablösung der Zylinderumströmung verhindern und sich dabei im Bereich praktisch realistischer Interaktionsparameter energetisch wesentlich günstiger verhalten als es der permanente Einsatz einer Lorentzkraft bei gleichem Interaktionsparameter erlaubt.

### Experimentnahe Regelung

Die in den Abschnitten 2.4.1, 2.4.2 beschriebenen Regler wurden unter Verwendung von Finiten Elementen in Femlab implementiert. Das örtliche Rechengitter  $\Omega = [-1.8, 2.2] \times [-0.4, 1.2]$  ist in Bild 4 dargestellt, für beide Regler wurde dasselbe Gitter verwendet. Für den FEM-Ansatz der numerischen Lösung wurden Taylor-Hood-Elemente gewählt, d.h. lineare Elemente für den Druck und quadratische Elemente für die Geschwindigkeit. Die Zeitintegration erfolgte mittels BDF(2), d.h. Mit einer zweischrittigen Formel basierend auf rückwärtigen Differenzen. Die hier dargestellten Ergebnisse sind alle aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit für die Reynoldszahl 200 berechnet worden. Weitere Berechnungen wurden im Reynoldszahlbereich bis 400 durchgeführt.

In Bild 10 ist die zeitliche Evolution der Widerstandskoeffizienten für die beiden numerisch untersuchten Regelungsansätze dargestellt. Im unkontrollierten Fall (links oben) ist die Periodizität der Schwankungen der Widerstandsbeiwerte zu erkennen. Bereits bei einem Interaktionsparameter von  $N=0.43$  und stets angeschalteter Lorentzkraft (rechts oben) stellt sich sowohl eine Reduzierung des Gesamtwiderstandes als auch des Auftriebs ein. Beim Zweipunktregler (links unten) ist zu erkennen, daß er verzögert einsetzt. Diese Verzögerung könnte verkleinert werden, indem die Meßpunkte weiter stromaufwärts gewählt werden, und somit einen größeren Winkel zum Zylindermittelpunkt einschließen.

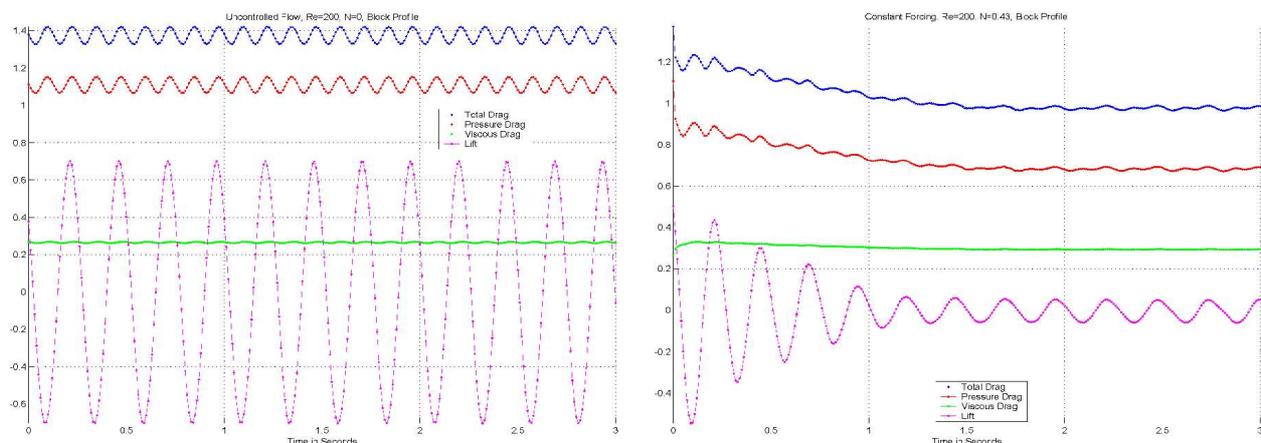
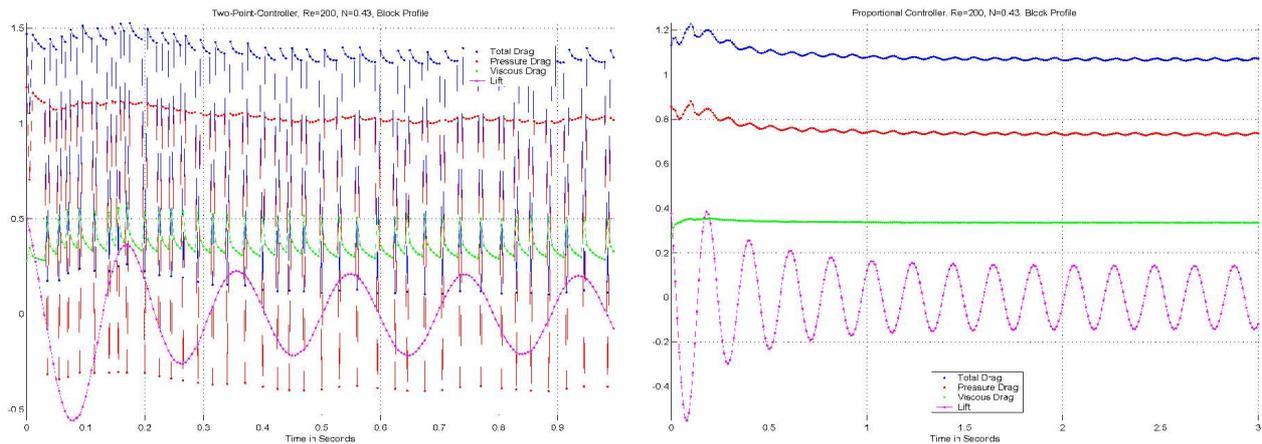


Bild 10: Zeitliche Entwicklung der Widerstandskoeffizienten für  $N=0$  (l.o.), mit  $N=0.43=\text{const.}$  (r.o.), Zweipunktregler mit  $N=0.43$  (l.u) und Proportionalregler mit  $N=0.43$  (r.u.)



Bei dem Proportionalregler (rechts unten) ist ähnlich wie bei der konstanten Lorentzkraft eine deutliche Verringerung des Auftriebs, des Gesamtwiderstandskoeffizienten und des Druckwiderstandskoeffizienten zu erkennen. Der Reibungswiderstandskoeffizient erhöht sich ebenfalls, wie bei der konstanten Lorentzkraft.

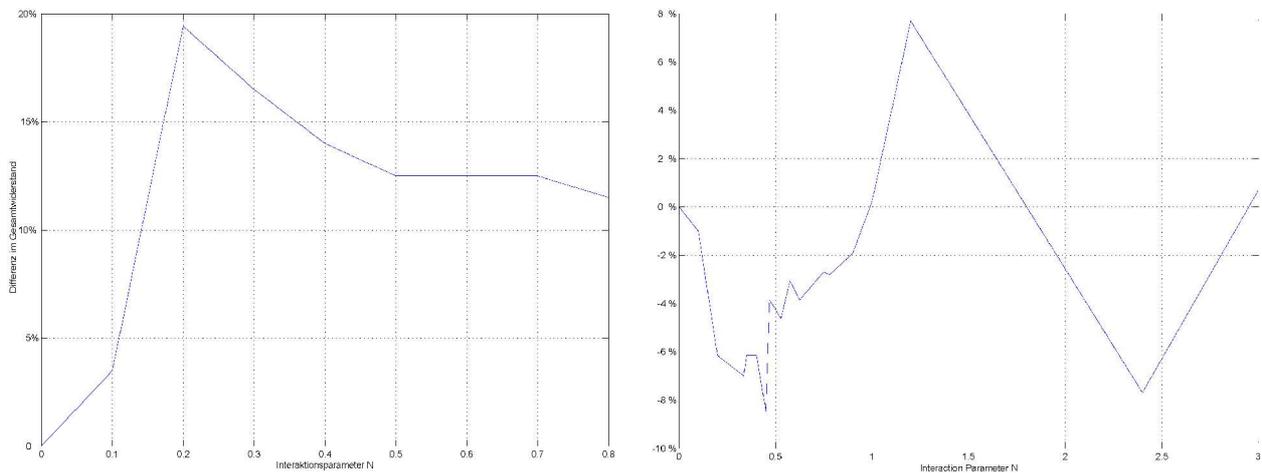


Bild 11: Durch Regelung gewonnene Widerstandsreduktion (links Zweipunktregler, rechts Proportionalregler)

Die Energieeinsparung von bis knapp 20% beim Zweipunktregler für  $N \leq 1$  ist in Bild 11 verdeutlicht. Im Schubbereich  $N > 1.3$  (nicht dargestellt) liefert der Zweipunktregler keine Energieeinsparung mehr. Für kleine Interaktionsparameter ( $N < 1$ ) erweist sich der Proportionalregler als nicht geeignet, den Gesamtwiderstandsbeiwert zu geringeren Energiekosten zu reduzieren. In diesem Bereich kostet die Regelung sogar mehr als bei konstantem Lorentzkrafteinsatz. Für Interaktionsparameter im Bereich zwischen 1 und 1.7 wird durch den Proportionalregler jedoch eine um bis zu 8% höhere Widerstandsreduktion erreicht, als bei konstantem Krafteinsatz. Für größere Werte des Interaktionsparameters arbeitet der Proportionalregler ineffizienter als die konstante Lorentzkraft. Aufgrund dieser Ergebnisse und der nicht möglichen experimentellen Realisierung wird die weitere Untersuchung des Proportionalreglers eingestellt.

### **3.2 Vergleiche mit Arbeiten außerhalb des Sonderforschungsbereichs und Reaktionen der wissenschaftlichen Öffentlichkeit auf die eigenen Arbeiten**

Die neuartige Diskretisierungstechnik in [38] wurde vom Antragsteller in zahlreichen Vorträgen der wissenschaftlichen Gemeinschaft vorgestellt und wird mittlerweile als Methode der Wahl anerkannt, obwohl ihr Implementierungsaufwand den der herkömmlichen Methoden leicht übersteigt.

Die in [39] und [40] diskutierten Checkpointing Techniken werden im Rahmen adaptiver Methoden für zeitabhängige partielle Differentialgleichungen auf großen Zeithorizonten und damit auch im Bereich der Kontrolle strömungsmechanischer Anwendungen sicherlich an Bedeutung gewinnen. Dies war ein zentraler Diskussionspunkt bei dem Miniworkshop 'Optimale Kontrolle nichtlinearer zeitabhängiger Probleme' im Januar dieses Jahres in Oberwolfach.

Die numerische Validierung der unter Femlab implementierten Strömungslöser an den Ergebnissen von Grundmann/Posdziech [44] verlief erfolgreich, wie die Übereinstimmung in Bild 3 dargestellt. Die einzigen den Verfassern bekannten Arbeiten, welche sich auch mit der Proportionalregelung der Zylinderumströmung mittels elektromagnetischen Aktuatoren beschäftigen sind von Chen [50] und Chen und Aubry [51] verfasst worden. Im Gegensatz zu den hier vorgestellten geschlossenen Regelungen ist in diesen Arbeiten die Reduktion der verschiedenen Widerstandskoeffizienten auf Null Ziel der Untersuchung. Dieses wird durch Regelung mit variablen Aktuatorconfigurationen, Strömungsgeschwindigkeits- und Wirbelstärkemessungen erreicht. Der hier beschriebene Ansatz ist für eine realistische Aufgabenstellung entwickelt, die sich an den experimentellen Möglichkeiten und Notwendigkeiten des TP C2 orientiert. Deshalb ist die Aktuatorconfiguration fest vorgegeben und die Zahl der Geschwindigkeitsmesspunkte auf zwei limitiert. Die Messung der Wirbelstärke ist nicht möglich. Deshalb können die erzielten Ergebnisse mit denen von Chen und Aubry nur qualitativ verglichen werden.

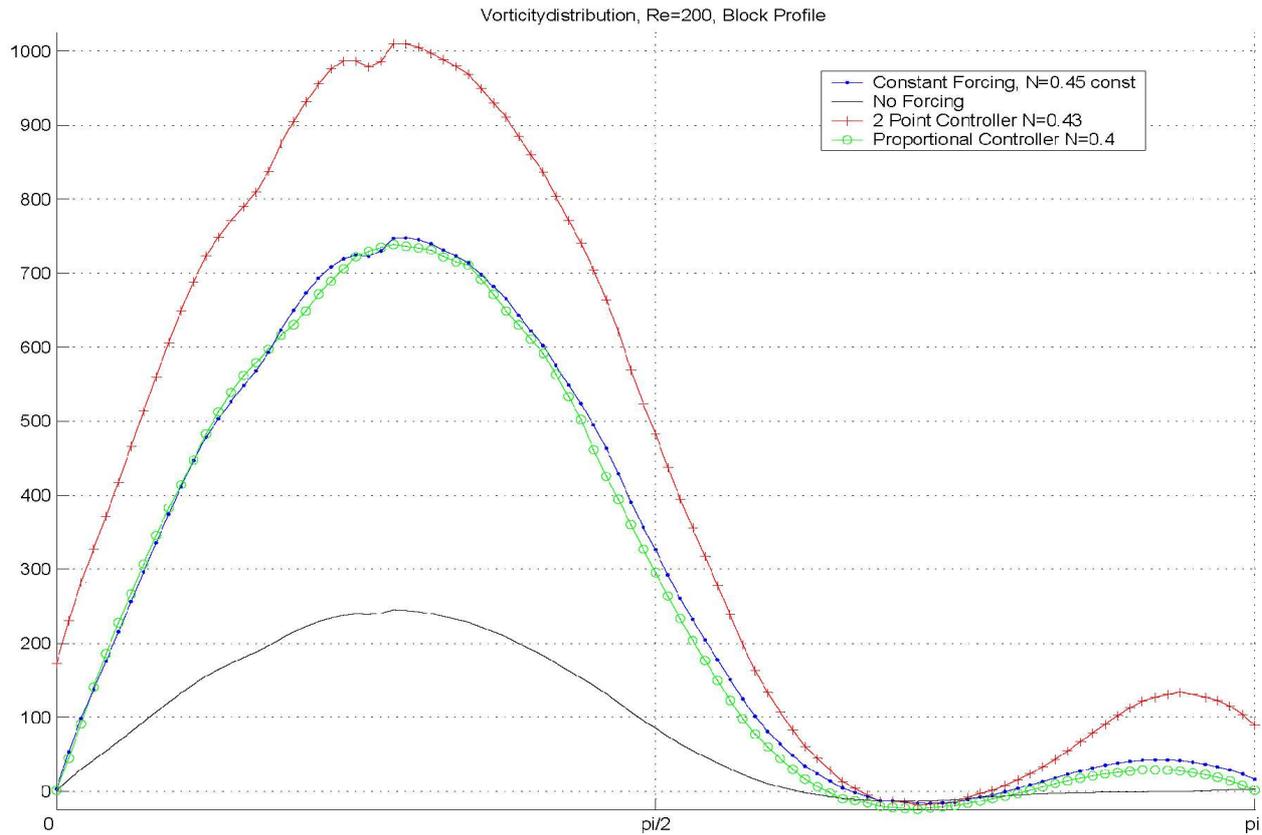


Bild 12: Wirbelstärke Verteilungen auf der Zylinderoberfläche vom vorderen Staupunkt zum hinteren Staupunkt, für die unkontrollierte Strömung, konstante Lorentzkraft, Zweipunktregler und Proportionalregler.

In Bild 12 ist die Wirbelstärkeverteilung auf der Oberfläche des Zylinders im Bereich zwischen vorderem zum hinteren Staupunkt dargestellt. Es wird ersichtlich, daß die Wirbelstärke im Vergleich zum unkontrollierten Fall durch Anwendung einer Lorentzkraft deutlich erhöht wird. Proportionalregler und konstante Kraft liefern hier sehr ähnliche Ergebnisse. Mit dem Zweipunktregler wird die größte Wirbelstärke erzeugt.

Die Druckverteilung auf der Zylinderoberfläche ist in Bild 13 dargestellt. Wie schon bei der Wirbelstärke ähneln sich die Ergebnisse für den Proportionalregler und jene für konstanten Kraft. Der Zweipunktregler erzielt die größte Druckminderung. Tendentiell werden damit die Ergebnisse in [50,51] bestätigt. Eine ausführlichere Diskussion ist in [53] enthalten.

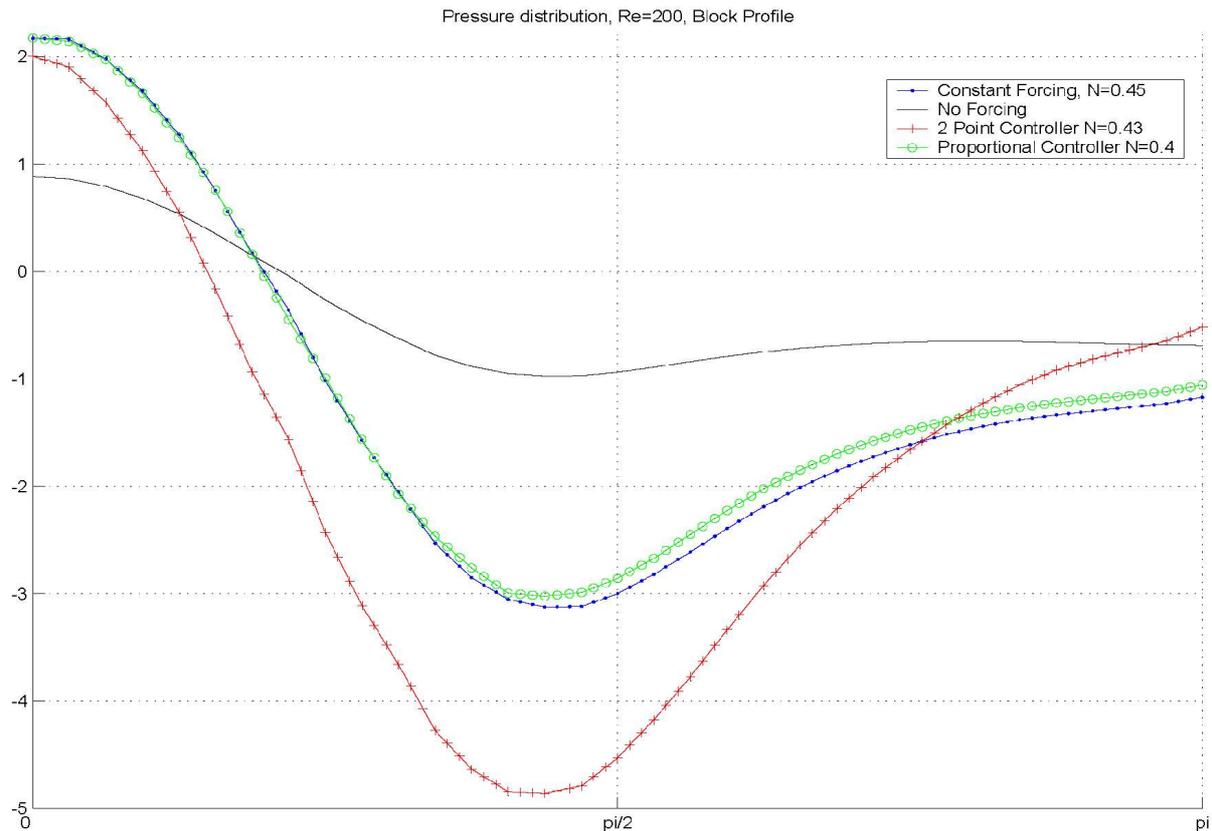


Bild 13: Druckverteilungen auf der Zylinderoberfläche vom vorderen Staupunkt zum hinteren Staupunkt, für die unkontrollierte Strömung, konstante Lorentzkraft, Zweipunktregler und Proportionalregler.

### 3.3 Bedeutung der Arbeiten für den Sfb

Die Arbeiten zur Boussinesq Approximation bilden den Ausgangspunkt für die Optimierung komplexerer gekoppelter Systeme von partiellen Differentialgleichungen, wie sie etwa bei der mathematischen Modellierung von Kristallzüchtungsprozessen auftreten. Die dabei verwendeten Methoden (Optimalsteuerung, Modell-Prädiktive Kontrolle) können prinzipiell auf alle im Sfb verwendeten mathematischen Modelle angewendet werden.

Optimales Checkpointing wird sicherlich für die numerische Berechnung von Sensitivitäten bei turbulenten Strömungen mit Hilfe von Adjungierten eine gewisse Bedeutung erlangen, insbesondere, wenn die Simulationszeiträume groß sind. Diese Methoden werden daher mittelfristig auch für andere Teilprojekte des Sfb von Bedeutung sein. Das gilt auch für die Methode des automatischen Differenzierens. Mit ihrer Hilfe wird es möglich sein, in den numerischen Teilprojekten auf der Grundlage der dort vorliegenden Programme Ableitungsinformation für die untersuchten Aufgabenstellungen zu erzeugen und diese dann ggf. für das Maßschneiden der entsprechenden Kontrolleingriffe zu verwenden.

Methoden der Modellreduktion dienen als Analysewerkzeug für komplexe Strömungen und bieten darüber hinaus die Möglichkeit, Kontrolleingriffe in die Strömung auf der Basis geeigneter reduzierter Modelle maßzuschneiden. Alle Teilprojekte, in denen numerische Simulationen zur Ergründung von physikalischen Phänomenen durchgeführt werden, können diese Methoden prinzipiell auf der Grundlage der Simulationsergebnisse anwenden, so wie es

gegenwärtig in Zusammenarbeit mit Teilprojekt A1 durchgeführt wird.

Die Resultate zur experimentnahen Regelung der Zylinderumströmung zeigen, daß Konzepte aus der Regelungstechnik angewendet werden können, um etwa die Kontrolle schwach leitfähiger Fluide energieeffizienter zu gestalten, als es bisher, etwa mit konstanten Lorentzkräften, möglich war. Gegenwärtig werden für diese Aufgabenstellung Methoden der Optimalsteuerung sowie Modell-Prädiktive Zugänge implementiert. Erste Ergebnisse zeigen dabei, daß es mit Lorentzkräften prinzipiell möglich ist, mechanische Steuerkonzepte, wie etwa Zylinderrotation, abzubilden, ohne jedoch intrusiv in die Strömung einzugreifen.

#### 4 Gäste und Aktivitäten

Während der ersten Auftragsphasen waren im TP A4 folgenden Wissenschaftler zu Gast:

- Prof. Dr. Günter Bärwolff, Technische Universität Berlin, im Rahmen der Arbeiten zur Randtemperatur Kontrolle der Boussinesq Approximation
- Professor Dr. Klaus Deckelnick, Universität Magdeburg, im Rahmen der Arbeiten zu Fehlerabschätzungen für diskrete Kontrollen der Navier-Stokes Gleichungen
- Dr. Roland Griesse, Karl-Franzens Universität Graz, im Rahmen von Arbeiten zu Parameter Sensitivitäten bei den Navier-Stokes Gleichungen
- Dr. Vincent Heuveline, Ruprecht-Karls Universität Heidelberg, im Rahmen von Arbeiten zur Zeitadaptivität bei Kontrollproblemen der Strömungsmechanik
- Professor Dr. Michael Hintermüller, Rice University und Karl-Franzens Universität Graz, im Rahmen der Arbeiten zur Globalisierung von Lösungsalgorithmen und zur Entwicklung schneller Methoden für kontrollrestringierte Aufgabenstellungen
- Professor Dr. Karl Kunisch, Karl-Franzens Universität Graz, im Rahmen von Arbeiten zur Kontrolle von Navier-Stokes Gleichungen
- Dr. Friedemann Leibfritz, Universität Trier, im Rahmen von Arbeiten zur Regelung von Systemen von partiellen Differentialgleichungen
- Dr. Rene Pinnau, Universität Darmstadt, im Rahmen von Arbeiten zur Halbleiter Kontrolle
- Dr. Thomas Slawig, Technische Universität Berlin, im Rahmen der Arbeiten zum Automatischen Differenzieren
- Dr. Boris Vexler, Ruprecht-Karls Universität Heidelberg, im Rahmen von Arbeiten zur numerischen Behandlung von Parameterschätzverfahren und deren Diskretisierung
- Dr. Axel Voigt, caesar, Bonn, im Rahmen von Arbeiten zur Kontrolle von Kristallzüchtungsprozessen und als Dozent der Blockvorlesung zur Modellierung, Simulation und Kontrolle von Kristallzüchtungsprozessen
- Dr. Stefan Volkwein, Karl-Franzens Universität Graz, im Rahmen von Arbeiten zur instantanen Kontrolle und zur Modellreduktion
- Daniel Wachsmuth, Technische Universität Berlin, im Rahmen von Arbeiten zur kontrollrestringierten Regelung in einer Zusammenarbeit mit dem TP C7 des Sfb 557

Im Rahmen des Sfbs und mit dessen Unterstützung sind vom TP A4 nachfolgend aufgeführte Aktivitäten (mit) durchgeführt worden:

- Blockvorlesung *Modellierung, Simulation und Kontrolle von Kristallzüchtungsprozessen*, 17.6.-28.6.2002, zusammen mit Dr. A. Voigt, caesar und Dr. G. Gerbeth, TP B5
- Konferenz *European Conference on Computational Optimization*, 29.3.-31.3.2004,

- zusammen mit Prof. Dr. A. Griewank, HU Berlin und Prof. Dr. R. Reemtsen, BTU Cottbus
- Workshop *Flow Control by Tailored Magnetic Fields*, Rossendorf, 1.4.-2.4.2004, zusammen mit Dr. G. Gerbeth, G.Mutschke und F. Stefani

Ferner wird von Herrn Pfeiffer die Preprint Reihe des Sfb 609 verwaltet.

## 5 Offene Fragen

Auf die Bearbeitung der dreidimensionalen Zylinderumströmung wurde verzichtet, da die Arbeit von Poncet [52] und Poncet et al. [27] darauf hindeuteten, daß bei der Kontrolle der Strömung mit wandparallelen Eingriffen die Dreidimensionalität der Strömung auch im höheren Reynoldszahlenbereich unterdrückt wird.

Die numerisch entwickelten Regelkonzepte müssen experimentell implementiert werden. Die technischen Möglichkeiten dafür stehen bereit. Jedoch besteht eine Diskrepanz zwischen experimentell und numerisch bei Optimierungsproblemen realisierbaren Reynoldszahlen, die nur durch eine weitere Verbesserung der numerischen Simulationshilfsmittel auf numerischer Seite verringert werden kann. Die bisher verwendete Simulationsumgebung FEMLAB hat sich hier als ungeeignet herausgestellt, und das sowohl hinsichtlich der Rechengeschwindigkeit, als auch in Bezug auf technischen Support von Seiten von Mathworks. Aus diesem Grund werden gegenwärtig von Studentischen Hilfskräften flexible Simulationsroutinen für Strömungen in ALBERT entwickelt. ALBERT ist eine von A. Schmidt und K. Siebert entwickelte, für Forschungszwecke frei verfügbare Simulationsumgebung, welche auch von anderen Teilprojekten verwendet werden könnte.

## 6 Literatur

- [1] M. Hinze, D. Wachsmuth: Proceedings of the Hanoi Conference on Scientific Computing 2003, erscheint 2004
- [2] M. Hinze, D. Wachsmuth: Preprint 11-2003, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin
- [3] F. Abergel, R. Temam: *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **1**, 303-325, 1990
- [4] T. Bewley, R. Temam, M. Ziane: *Physica D*, **138**, 2000
- [5] M.D. Gunzburger: *Flow Control*, IMA, Springer 1995
- [6] M.D. Gunzburger, S. Manservigi: *Siam J. Numer. Anal.* **37**, 1481-1512, 2000
- [7] M.D. Gunzburger, S. Manservigi: *Siam J. Cont. Optim.* **39**, 594-634, 2000
- [8] M.D. Gunzburger: *Perspectives in Flow Control and Optimization*, Siam, 2003
- [9] R. Glowinski: *Lectures in Applied Mathematics*, **28**, 1990
- [10] J.-W. He, R. Glowinski, R. Metcalfe, A. Nordlander, J. Periaux: *J. Comp. Phys.*, **163**, 83-117, 2000
- [11] H. Choi, M. Hinze, K. Kunisch: *Appl. Numer. Math.*, **31**, 133-158, 1999
- [12] M. Hinze, K. Kunisch: *J. Flow, Control and Combustion*, **65**, 273-295, 2000
- [13] K. Kunisch, S. Volkwein: *Siam J. Numer. Anal.* **40**, 492-515, 2002
- [14] T. Bewley, P. Moin: *ASME DE*, **75**, 221-227, 1994
- [15] P. Moin, T. Bewley: *Appl. Mech. Rev.*, **47**(6), 3-13, 1994
- [17] T. Bewley, S. Liu: *J. Fluid Mech.* **365**, 305-349, 1998
- [18] T. Bewley: *Progress in Aerospace Sciences* **37**, 21-58, 2001
- [19] J. Kim, C. Lee, T. Berger, J. Lim, H. Choi: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **10**, 1719, 1996

- [20] J. Lim, H. Choi, J. Kim: *Phys. Fluids.*, **10**, 1197-1205, 1998
- [21] C. Min, H. Choi: *J. Fluid Mech.*, **401**, 123-156, 1999
- [22] C. Min, H. Choi: *J. Fluid Mech.*, **401**, 123-156, 1999
- [23] T.W. Berger, J. Kim, C. Lee, J. Lin: *Phys. Fluids*, **12**(3), 631-649, 2000
- [24] Y. Chang, S. Collis: *Proceedings of the FEDSM99, ASME*, 1999
- [25] R.D. Prabhu, S.S. Collis, Y. Chang: *Phys. Fluids* **13**, 520-537, 2001
- [26] P. Koumoutsakos: *Phys. Fluids*, **9**, 3808-3816, 1997
- [27] P. Poncet, P. Koumoutsakos: *Proceedings of The Fourteenth International OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE*, 2004
- [28] M. Hinze, K. Kunisch: *ESAIM: Proceedings*, **4**, 181-198, [www.emath.fr/proc/Vol.1](http://www.emath.fr/proc/Vol.1), 1998
- [29] M. Hinze, S. Volkwein: *Nonlinear Analysis T.M.A.*, **50**, 1-25, 2002
- [30] M. Hinze: *Preprint Math-NM-09-2002, Technische Universität Dresden*, 2002
- [31] K. Afanasiev, M. Hinze: *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics* **216**, 317-332, 2001
- [32] M. Hinze, K. Kunisch: *Siam J. Control Optim.*, **40**, 273-298, 2001
- [33] M. Hintermüller, M. Hinze: *M2AN*, **36**, 725-746, 2002
- [34] M. Hintermüller, M. Hinze: *Technical Report TR-03-11, CAAM Rice University*, 2003
- [35] M. Ulbrich: *System & Control Letters* **48**, 297-311, 2003
- [36] K. Deckelnick, M. Hinze: *ISNM* **143**, 87-103, 2002
- [37] K. Deckelnick, M. Hinze: *Numer. Math.* **97**, 297-320, 2004
- [38] M. Hinze: *erscheint in Computational Optimization and Applications*
- [39] M. Hinze, A. Walther: *Preprint Math-NM-06-2002, Technische Universität Dresden*, 2002
- [40] M. Hinze, J. Sternberg: *erscheint in Optimization Methods and Software*
- [41] M. Hinze, U. Matthes: *Preprint Math-NM-06-2004, Technische Universität Dresden*, 2004
- [42] G. Bärwolff, M. Hinze: *Preprint 15-03, Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin*, 2003
- [43] M. D. Gunzburger, E. Ozugurlu, J. Turner, H. Zhang: *J. Crystal Growth* **234**, 47-62, 2002
- [44] O. Posdziech, R. Grundmann: *Eur. J. Mech. B -Fluids* **20**, 255-274, 2001
- [45] R.D. Henderson, R.D.: *Phys. Fluids*, **7**, 2102-2104, 1995
- [46] T. Weier: *Bericht Forschungszentrum Rossendorf*, 2004
- [47] T. Weier, G. Gerbeth, G. Mutschke, J. Fey, O. Posdziech, O. Lielausis, G. Platacis: *Proceedings of the International Symposium on Seawater Drag Reduction*, 255-274, 1998.
- [48] K.Y. Tang, W.R. Graham, J. Peraire: *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **44**, 945-990, 1999
- [49] M. Hinze, T. Slawig: *Optimization Methods and Software* **18**, 299-315, 2003
- [50] Z. Chen: *Dissertation, New Jersey Institute of Technology*, 2001
- [51] Z. Chen, N. Aubry: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2003
- [52] P. Poncet: *Phys. Fluids* **14**, 2021-2023, 2002
- [53] M. Hinze, O. Pfeiffer: *Preprint SFB609-20-2004*, 2004
- [54] M. Hinze: *Preprint SFB609-19-2004*, 2004