Prof. Roland Gunesch Wintersemester 2005-06

Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1:
a) Finden Sie 2 verschiedene Billiards mit überabzählbar vielen periodischen Orbits der Periode 2.

b) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ein Billiard mit überabzählbar vielen periodischen Orbits mit derselben Periode n.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Ableitungsmatrix der Billiard-Abbildung

$$(s, \theta) \mapsto (s', \theta')$$

als Funktion der Parameter s, s', der Winkel θ, θ', der Erzeugendenfunktion $H = H(s, s')$ und der Krümmungen κ, κ' des Randes an den Stellen s, s' :

a) Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial s'}{\partial \theta} = \frac{H}{\sin \theta'}.$$

b) Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{\kappa' H}{\sin \theta'} - 1.$$

c) Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial s'}{\partial s} = \frac{\kappa H - \sin \theta}{\sin \theta'}.$$

d) Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial \theta'}{\partial s} = \kappa' \frac{\kappa H - \sin \theta}{\sin \theta'} - \kappa.$$

Aufgabe 3:
Das *Stadion-Billiard* ist definiert durch zwei Halbkreise (von gleichem Radius), die mit zwei Strecken (gleicher Länge) zusammen eine konvexe C^1-Kurve bilden.

Zeigen Sie: Das Orbit, welches auf der langen Symmetrieachse liegt, ist hyperbolisch. Berechnen Sie dazu df^2 für dieses Orbit, wobei f die Billiard-Abbildung ist, und zeigen Sie, dass dieses Orbit ein Sattel ist.

Aufgabe 4:
Finden Sie für jedes Billiard mit C^1-Rand und jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine Funktion mehrerer Variablen, so dass jeder kritische Punkt dieser Funktion einem periodischen Orbit der Periode n des Billiards entspricht.

Abgabe: 27.1.2006 in der Vorlesung