Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:
Für $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ist auf dem n-Torus eine Translation definiert durch

$$T(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n) \qquad \text{(mod 1)}.$$

Zeigen Sie: Wenn diese Translation topologisch transitiv ist, dann ist sie *ergodisch* bezüglich dem Lebesgue-Maß auf $[0, 1]^n$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Für kein $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Translation aus Aufgabe 1 *mischend* bezüglich dem Lebesgue-Maß auf $[0, 1]^n$.

Aufgabe 3:
Sei T die Translation aus Aufgabe 1 mit $n = 2$, sei T topologisch transitiv, und sei $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 4^{4^4} \sin(2\pi x)\cos(2\pi y) + (10\sin(2\pi x))^2 - (4\cos(2\pi y))^2 & x, y \in \mathbb{Q}, \\ 99y^{-99} & x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}, \\ 2^{1000}x^{-2^{1000}} & x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, \\ 5^{5^5}x^{5y}y^{5x} & x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Funktion

$$A_f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)),$$

d.h. das *Zeitmittel* von f über das Orbit von x unter T.

Es genügt, die Antwort als Funktion in $L^1(\mu)$ anzugeben (μ =Lebesgue-Maß), d.h. an μ-fast allen Punkten $x \in [0, 1]^2$ zu definieren.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Ein maßerhaltendes diskretes dynamisches System (T, μ) ist ergodisch genau dann, wenn der lineare Operator

$$\hat{T} : L^1(\mu) \to L^1(\mu),$$

der definiert ist durch

$$\hat{T}(f) := f \circ T,$$

d.h. $(\hat{T}(f))(x) := f(T(x))$, einen *einfachen* Eigenwert 1 hat.

Abgabe: 17.1.2006 in der Vorlesung