Prof. Roland Gunesch — Wintersemester 2005-06

Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme

Lösungen von Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus mit einem periodischen Orbit der Periode k.

a) Welche Werte kann dann die Rotationszahl von f haben?

Lösung:
Alle Äquivalenzklassen
$$\left[\frac{p}{k}\right], \, p \in \mathbb{Z}$$
sind möglich. Bemerkung: Genausogut kann man nur die Äquivalenzklassen mit $p \in \mathbb{N}$ betrachten, oder sogar nur $p \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, da dies schon alle sind. Andere Werte können nicht angenommen werden: Die Rotationszahl muss wegen dem periodischen Orbit rational sein, also gleich $\left[\frac{p}{q}\right]$, $p, q \in \mathbb{Z}$. O.B.d.A. ist dieser Bruch gekürzt. Damit hat jeder periodische Punkt von f die Periode lq, $q \in \mathbb{Z}$. Somit $q = k/l$.

b) Kann f^n für $n \neq k$ einen Fixpunkt haben?

Lösung:
Ja, für $n = kl$, $l \in \mathbb{Z}$ ist jeder Fixpunkt von f^k natürlich auch einer für $f^n = (f^k)^l$. Für $n \notin k \cdot \mathbb{Z}$ kann f^n keinen Fixpunkt haben, wegen demselben Argument wie in (a).

Aufgabe 2:
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus mit Rotationszahl α und $h : S^1 \to S^1$ ein orientierungs*umkehrender* Kreishomöomorphismus.

a) Geben Sie eine Formel für die Rotationszahl der Konjugation $h^{-1} \circ f \circ h$ an.

Lösung:
Für orientierungsumkehrendes h gilt
$$\rho(h^{-1} \circ f \circ h) = -\rho(f).$$

b) Beweisen Sie Ihre Formel.

Lösung:
Sei H ein Lift von h, d.h. $\pi \circ H = h \circ \pi$. Es gilt
$$H(x+1) = H(x) - 1$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. (Beachten Sie das Minuszeichen.) Wir wählen H so, dass $H(0) \in [0, 1)$.

H ist invertierbar, und H^{-1} ist Lift von h^{-1}, denn es gilt für alle x :

$$\pi(x) = \pi \circ H \circ H^{-1}(x) = h \circ \pi \circ H^{-1}(x)$$

und somit

$$h^{-1} \circ \pi(x) = \pi \circ H^{-1}(x).$$

Weiterhin ist $H^{-1} \circ F \circ H$ ein Lift von $h^{-1} \circ f \circ h$, denn es gilt

$$\pi \circ H^{-1} \circ F \circ H = h^{-1} \circ \pi \circ F \circ H = h^{-1} \circ f \circ \pi \circ H = h^{-1} \circ f \circ h \circ \pi.$$

Es gilt

$$|H(x) + x| < 4$$

(beachten Sie das Pluszeichen) und $|H^{-1}(x) + x| < 4$. Nun wenden wir das Lemma an, das besagt: $|x - y| < k \in \mathbb{N}$ impliziert $|g(x) - g(y)| < k$. Für g wählen wir F^nund $-H$:

$$|H(x) - (-x)| < 4$$

$$|F^n \circ H(x) - F^n(-x)| < 4$$

$$|(-H) \circ F^n \circ H(x) - (-H) \circ F^n(-x)| < 4$$

und somit

$$\begin{aligned}
\rho(h^{-1} \circ f \circ h) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H^{-1} \circ F^n \circ H(x) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(H \circ F^n(-x) + 4) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(-F^n(-x) + 8) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} F^n(y).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3:
Sei $f : X \to X$ eine Abbildung. Eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ heißt **minimal**, wenn A gleich dem Abschluss vom Orbit von jedem Punkt in A ist. Zeigen Sie: Wenn A und B abgeschlossene minimale Teilmengen von X sind, dann sind A und B gleich oder disjunkt.

Lösung:
Wenn A abgeschlossen und minimal ist, gilt für alle $x \in A$: $A = \overline{f^{\mathbb{Z}}(x).}$ Haben nun A, B diese Eigenschaft und ist $x \in A \cap B$, so ist $A = \overline{f^{\mathbb{Z}}(x)} = B$. Also ist $A \cap B = \emptyset$ oder $A = B$. □

Aufgabe 4:
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus mit Rotationszahl p/q. Zeigen Sie:

a) Für jedes $x \in S^1$ gibt es $x_+, x_- \in S^1$, so dass das Orbit von x unter f^q gegen x_+ konvergiert und das Orbit von x unter f^{-q} gegen x_- konvergiert.

Lösung:
Jedes periodische Orbit von f hat Periode q und ist somit Fixpunkt von f^q und Nullpunkt von $F^q - id - p$. Wenn $(F^q - id - p)(x) = 0$ ist, gilt die Aussage mit $x_+ = x = x_-$. Wenn $(F^q - id - p)(x) > 0$ ist, definiere x_+ als die nächste Nullstelle rechts von x und definiere x_-als die nächste Nullstelle links von x. Dann ist das Orbit von x im Intervall (x_-, x_+) monoton nach rechts wachsend und beschränkt, also konvergent. Der Limes ist Fixpunkt wegen Stetigkeit, also x_+. Analog gilt $\lim_{n\to-\infty} f^n(x) = x_-$.

Für $(F^q - id - p)(x) < 0$ gilt dasselbe Argument, wobei x_+ die nächste Nullstelle links und x_- die nächste Nullstelle rechts von x sind.

b) Wenn f mindestens zwei disjunkte periodische Orbits hat, dann liegen x_+und x_- auf disjunkten periodischen Orbits von f.

Lösung:
Hier muss noch gefordert werden, dass x nicht auf einem periodischen Orbit liegt. Mit dieser Forderung hat das Intervall (x_-, x_+) nichtverschwindende Länge. Wenn x_-, x_+ auf demselben periodischen Orbit liegen, gibt es nach Konstruktion in Teil (a) keinen periodischen Punkt in (x_-, x_+). Ein zweites periodisches Orbit würde das Orbit von x_-, $f(x_-) = x_+$ also überholen. Dann würde für den Lift F gelten: $F^q(x_-) = x_- + p$, $F^q(y) = y + p$ (wobei y das zweite Orbit ist), aber $y < x_-$ und $F^q(y) > F^q(x_-)$. Widerspruch.