Prof. Roland Gunesch | Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Blatt 8

Aufgabe 1:
Sei X ein beliebiger endlicher Raum, bestehend aus N Punkten, versehen mit der Topologie, in der alle Teilmengen von X offen sind (die "feinste Topologie"; sie wird erzeugt durch die diskrete Metrik $d(x,y) = 1$ für alle $x \neq y$).

a) Geben Sie ein Beispiel einer topologisch transitiven Abbildung $f : X \to X$ an.

b) Bestimmen Sie die Zahl $T(N)$ aller topologisch transitiven Abbildungen $f : X \to X$.

c) Gibt es eine topologisch mischende Abbildung auf X? (Beispiel oder Gegenbeweis)

Aufgabe 2:
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $B_k := \{\omega \in \Omega = \Omega_2 | \, \forall m, n \in \mathbb{N} : |\sum_{i=n}^{m} (-1)^{\omega_i}| \leq k\}$ die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die gilt, dass für jeden endlichen Block von Ziffern von ω, egal wie lang, sich die Zahl der 0-en von der Zahl der 1-en höchstens um k unterscheidet.

a) Zeigen Sie: B_k ist eine Shift-invariante und abgeschlossene Teilmenge von Ω.

b) Ist $\sigma : B_k \to B_k$ ist topologisch transitiv? (Beweis oder Widerlegung)

c) Zeigen Sie: $\sigma : B_k \to B_k$ ist nicht topologisch mischend.

Aufgabe 3:
Sei A eine 2×2-Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

a) Zeigen Sie: Für $|\det(A)| = 1$ ist die Abbildung $L_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\left[\binom{x}{y}\right] \mapsto \left[A \cdot \binom{x}{y}\right]$ ein Diffeormorphismus auf dem 2-Torus.

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $L_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ hat für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich viele periodische Punkte der Periode n genau dann, wenn A keine Eigenwerte λ mit $|\lambda| = 1$ hat.

Aufgabe 4:
Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, L_A die **arnoldsche Katzenabbildung**. $G_q := \left\{ \left[\binom{a/q}{b/q}\right] \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$ das $q \times q$-Gitter auf dem 2-Torus ($q \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

a) Es gibt kein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $L_A^n =$id.

b) Für jedes $q \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n = n(q)$, so dass $(L_A|_{G_q})^n =$id.

c) Finden Sie eine obere Schranke für $n(100)$.

Abgabe: Montag, 13.6.2005 in der Vorlesung