Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

# Übungen zur Vorlesung
# Einführung in dynamische Systeme
# Blatt 7

**Aufgabe 1:**
a) Zeigen Sie:

$$d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda^{-|i|}|\alpha_i - \omega_i|$$

ist für jedes $\lambda > 1$ eine Metrik auf der Menge $\Omega_N$ aller **zweiseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0,1,\ldots,N-1\}$.

b) Zeigen Sie: Für alle $\lambda > 2N-1$ ist für jede Wahl von $\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ der **Zylinder** $Z_{\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n} = \{\omega\in\Omega_N : \omega_{-n}=\alpha_{-n},\ldots,\omega_n=\alpha_n\} \subset \Omega_N$ ein offener Ball mit Radius $\lambda^{-n}$ in $\Omega_N$ bezüglich der Metrik $d_{\lambda,N}$.

c) Zeigen Sie: Für $\lambda > N$ ist der Zylinder $Z_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} \subset \Omega_N^R$ ein offener Ball mit Radius $\lambda^{-n}$ bezüglich der Metrik $d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) := \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \lambda^{-i}|\alpha_i-\omega_i|$ auf der Menge $\Omega_N^R$ aller **einseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0,1,\ldots,N-1\}$.

**Aufgabe 2:**
a) Zeigen Sie: Für den **Shift-Operator** $\sigma$, der durch $(\sigma(\omega))_n := \omega_{n+1}$ definiert ist, gibt es überabzählbar viele nichtperiodische Punkte $\omega\in\Omega^R$ mit $\omega_i = 0$ für alle geraden Zahlen $i$.

b) Geben Sie explizit ein solches $\omega$ an.

**Aufgabe 3:**
Finden Sie für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Zahl der periodischen Punkte $\omega\in\Omega_N$ des Shift-Operators auf $\Omega_N$, die Periode $n$ haben und für die gilt, dass $\omega_i = 0$ für alle geraden Zahlen $i$.

**Aufgabe 4:**
a) Sei $G$ die **G-förmige Hufeisen-Büroklammer**

$$G:\Lambda\to\Lambda,\quad G(x,y) := \begin{cases} \left(3x, \frac{y}{3}\right) & \text{für } x\le 1/3 \\ \left(3x-2, \frac{y+2}{3}\right) & \text{für } x\ge 2/3 \end{cases}$$

auf dem $G$-invarianten Cantor-Staub $\Lambda = C\times C = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} G^i([0,1]^2)$. Sei $h:\Omega\to\Lambda$ die Konjugation zwischen $G$ und dem Shift auf $\Omega$, definiert durch $\omega\mapsto h(\omega) := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} G^{-n}(V_{\omega_n})$, wobei $V_0 = \left[0,\frac{1}{3}\right]\times[0,1]$ und $V_1 = \left[\frac{2}{3},1\right]\times[0,1]$.

Finden Sie $n\in\mathbb{N}_0$ und einen Zylinder $Z_{\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n}\subset\Omega$ mit $h(Z_{\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n}) = \Lambda\cap R$ für das Rechteck $R = \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

Tipp: Wenn $x\in\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]$ und $y\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$, welche Ziffern von $x,y$ sind dann in der triadischen Darstellung festgelegt?

Abgabe: Montag, 6.6.2005 in der Vorlesung