Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Blatt 10

Aufgabe 1:
a) Berechnen Sie die Box-Dimensionen der Mengen $A_k = \{\frac{1}{n^k} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie die Hausdorff-Dimension von A_k und zeigen Sie, dass diese nicht mit der Box-Dimension übereinstimmt.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die **topologische Entropie** des Shiftoperators σ auf der Menge Ω_N aller zweiseitigen Sequenzen über dem Alphabet mit N Symbolen. Gehen Sie so vor:

a) Zeigen Sie: Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist der (unsymmetrische) Zylinder

$$Z_{\alpha_{-m},\dots,\alpha_{+m+n}} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \{-m, -m+1, \dots, +m+n\} : \omega_i = \alpha_i\}$$

ein offener Ball von Radius λ^{-m} für die Orbit-Metrik $(d_\lambda)^n_\sigma$ um jeden seiner Punkte.
Zur Erinnerung: Der (symmetrische) Zylinder $Z_{\alpha_{-m},\dots,\alpha_{+m}}$ ist ein λ^{-m}-Ball für d_λ.

b) Wieviele solche Zylinder (abhängig von n, m) benötigen Sie, um Ω_N zu überdecken?

c) Berechnen sie nun die topologische Entropie.

Aufgabe 3:
a) Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{Z}$ die topologische Entropie der Abbildung auf dem 1-Torus $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1,\ [x] \mapsto [kx]$.

b) Wiederholen Sie die Berechnung auf dem n-Torus für $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n,\ [x] \mapsto [kx]$. Wie hängt das Ergebnis von der Dimension ab?

Aufgabe 4:
a) Finden Sie für alle $a > 0$ einen Maßraum X mit Gesamtmaß 1, eine Partition P von X und einen Punkt $x \in X$ mit **Information** $I_P(x) = a$.

b) Gibt es für beliebige $a_1, \dots, a_n > \log n$ eine Partition P und Punkte $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $I_P(x_i) = a_i$ für alle i? Auch für beliebige $a_1, \dots, a_n > 0$?

c) Bestimmt die **(maß-theoretische) Entropie** einer endlichen Partition die Maße der Elemente der Partition? D.h. gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n > 0$ und $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n > 0$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1 = \sum_{i=1}^n q_i$ und $(p_1, \dots, p_n) \neq (q_1, \dots, q_n)$, so dass für alle Partitionen $P = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ und $Q = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ von X mit $\mu(C_1) = p_1, \dots, \mu(C_n) = p_n$ und $\mu(D_1) = q_1, \dots, \mu(D_n) = q_n$ gilt: $H(P) = H(Q)$?

Tipp: Probieren Sie Zahlen in $\{2^{-m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Abgabe: Montag, 4.7.2005 in der Vorlesung