Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Blatt 1

Aufgabe 1:
a) Lösen Sie die Rekurrenzrelation von Leonardo da Pisa:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$$

Ansatz: Für die formale Potenzreihe $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ führt die Rekurrenzrelation zu einer Gleichung für formale Potenzreihen. Diese läßt sich mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}, \quad A = \frac{1}{a-b} = -B$$

und der Formel $\frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$ auf eine algebraische Gleichung reduzieren, die in diesem Fall leicht lösbar ist.

b) Beweisen Sie Ihre Formel per Induktion.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Für $k \leq 1$ konvergieren alle Orbits der diskreten logistischen Gleichung

$$x_{n+1} = kx_n(1-x_n), \quad x_n \in [0,1]$$

gegen 0.

b) Für welche Orbits und welche Werte von k ist diese Konvergenz exponentiell (d.h. es gibt $C \in \mathbb{R},\ \lambda < 1$ so dass für alle n gilt: $x_n < C\lambda^n$)?

Aufgabe 3:
Sei $a_n :=$ die letzte Ziffer von 2^n in Dezimaldarstellung, $b_n :=$ die letzten k Ziffern ($k \in \mathbb{N}$ fest) und $c_n :=$ die erste Ziffer.

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) a_n ist periodisch mit Periode 4 und durchläuft die Folge 2,4,8,6.

b) b_n ist periodisch für jedes k.

c) c_n ist periodisch mit Periode 10 und durchläuft die Folge 2,4,8,1,3,6,1,2,5,1.

Aufgabe 4:
Finde eine offene Menge X in $\mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $f : X \to X$ so dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(f(x), f(y)) < \frac{1}{2} d(x,y)$$

und f dennoch keinen Fixpunkt in X hat.

Abgabe: Montag, 18.4.2005 in der Vorlesung