Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung

Einführung in dynamische Systeme

Blatt 9

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Selbstähnlichkeitsdimension folgender Mengen:

a) dem Menger-Schwamm in $\mathbb{R}^3$:

Lösung:
Der Menger-Schwamm M besteht aus 20 Kopien von sich selbst, skaliert mit dem Faktor $\frac{1}{3}$, somit ist

$$\dim_S(M) = \frac{\log 20}{\log 3}.$$

b) dem n-fachen Cantor-Staub $C \times \cdots \times C \subset \mathbb{R}^n$ (n-faches Produkt der Standard-Cantormenge C):

Lösung:
Der n-fache Cantor-Staub $C \times \cdots \times C \subset \mathbb{R}^n$ besteht aus 2^n Kopien, skaliert mit dem Faktor $\frac{1}{3}$, somit ist

$$\dim_S(C \times \cdots \times C) = \frac{n \log 2}{\log 3}.$$

c) der Cantormenge $C(\lambda)$, die entsteht, wenn aus $[0,1]$ das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda \in (0,1)$ entfernt wird, aus jedem verbleibenden Intervall der Länge x wieder das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda x \in (0,1)$ entfernt wird usw.:

Lösung:
Wenn wir aus $(0,1)$ ein Stück der Länge λ in der Mitte entfernen, bleiben zwei Stücke der Länge

$$s = \frac{1-\lambda}{2}.$$

Also gilt: $C(\lambda)$ besteht aus 2 Kopien, skaliert mit dem Faktor s, somit ist

$$\dim_S(C(\lambda)) = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}.$$

Damit läßt sich mittels geeigneter Wahl von $\lambda \in (0,1)$ jede Dimension in $(0,1)$ erreichen.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Die Hausdorff-Dimension von einer abzählbaren Menge ist 0.

Lösung:
Die Menge heiße $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Sei $\delta > 0$. Überdecke A mit der abzählbaren Vereinigung der Mengen $U_i := B_{\delta\cdot 2^{-i-1}}(a_i)$. Dann ist

$$\begin{aligned} h^s_\delta &\le \sum_{i\in\mathbb{N}} (\delta 2^{-i})^s \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta^s (2^s)^{-i} \\ &\le \delta^s \frac{1}{1-2^s} \end{aligned}$$

und somit beliebig klein, als gleich 0. Dies gilt für alle $s > 0$, also ist die Hausdorff-Dimension Null. □

b) Konstruieren Sie eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit Box-Dimension n und Hausdorff-Dimension 0.

Lösung:
Sei A eine Abzählung von $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Dann gilt wegen $\dim_{\mathrm{B}}(A) = \dim_{\mathrm{B}}(\overline{A})$, dass $\dim_{\mathrm{B}}(A) = \dim_{\mathrm{B}}([0,1]^n) = n$, und da A abzählbar ist, gilt wegen Teilaufgabe (a), dass $\dim_{\mathrm{H}}(A) = 0$.

Aufgabe 3:
Sei h^d das d-dimensionale Hausdorff-Maß. Konstruieren Sie für jedes $d \in [0, \infty)$:

a) eine Menge A mit $h^d(A) \in (0, \infty)$:

Lösung:
Die geänderte Cantor-Menge $C(\lambda)$ liefert für jedes $d \in (0,1)$ eine Menge A_d mit der gesuchten Eigenschaft.

Jedes $r \in (0, \infty)$ läßt sich schreiben als $r = kd$ mit $k \in \mathbb{N}$, $d \in (0,1)$. Daher hat $A_d \times \cdots \times A_d$ (k-mal) die gesuchte Dimension $kd = r$. Es gilt hier die Produktformel für die Hausdorff-Dimension, da A_d abgeschlossen ist.

Alternativ kann man auch $r = k + d$ schreiben mit $k \in \mathbb{N}$, $d \in (0,1)$ und $A = A_d \times [0,1]^k$ benutzen. Es gilt hier wieder die Produktformel, da A_d (und $[0,1]^k$) abgeschlossen ist.

Wir können sogar den Wert von $h^d(A) \in (0, \infty)$ aussuchen, denn bei Skalierung mit dem Faktor s gilt $h^d(sA) = s^d h^d(A)$.

Für $d = 0$ hat die einpunktige Menge $A = \{p\}$ die gesuchte Eigenschaft.

b) eine Menge A mit Hausdorff-Dimension d und $h^d(A) = 0$:

Lösung:
Für $d > 0$ setze z.B. $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i} A_{d-d/i}$ (disjunkte Vereinigung der $A_{d-d/i}$, skaliert mit $\frac{1}{i}$). Dann gilt

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \dim_{\mathrm{H}}(A_{d-d/i}) = d.$$

Weiterhin gilt: $h^d(A_{d-d/i}) = 0$, somit $h^d(A) = 0$.

Für $d = 0$ bietet sich die leere Menge an, für die gilt, dass $h^d(\emptyset) = 0$ für alle $s \ge 0$. Je nach Definitionsformulierung hat die leere Menge entweder Dimension 0 (und löst damit diese Aufgabe) oder Dimension $-\infty$ (und dann gibt es keine Lösung).

c) eine Menge A mit Hausdorff-Dimension d und $h^d(A) = \infty$:

Lösung:
Für $d > 0$ setze z.B. $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} iA_d$ (disjunkte Vereinigung der A_d, skaliert mit i). Dann gilt

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \dim_{\mathrm{H}}(iA_d) = d.$$

Weiterhin gilt: $h^d(A_d) > 0$, somit $h^d(A) > ih^d(A_d)$, also $h^d(A) = \infty$.

Für $d = 0$ wähle eine abzählbare Menge.

Aufgabe 4:
a) Zeigen Sie: Es gibt Mengen, so dass die Summe der Hausdorff-Dimensionen kleiner ist als die Hausdorff-Dimension des Produkts.

Tipp: Untersuchen Sie folgende $A, B \subset [0,1]$:

$$\begin{aligned} A &= \{0.x_1 \dots x_{n_1} 0 \dots 0 x_{n_2+1} \dots x_{n_3} 0 \dots 0 x_{n_4+1} \dots x_{n_5} \dots\} \\ &= \{x \mid (x_{n_1+1} \dots x_{n_2}) = (0 \dots 0),\ (x_{n_3+1} \dots x_{n_4}) = (0 \dots 0),\ \dots\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{0.0 \dots 0 x_{n_1+1} \dots x_{n_2} 0 \dots 0 x_{n_3+1} \dots x_{n_4} \dots\} \\ &= \{x \mid (x_1 \dots x_{n_1}) = (0 \dots 0),\ (x_{n_2+1} \dots x_{n_3}) = (0 \dots 0),\ \dots\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine schnell wachsende Folge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = 0, \qquad \dim_{\mathrm{H}}(B) = 0, \qquad \dim_{\mathrm{H}}(A \times B) = 1.$$

Lösung:
A wird überdeckt von $10^{n_{i-1}}$ Bällen der Größe $2 \cdot 10^{-n_i}$ für i ungerade. Somit ist

$$\begin{aligned} h^s(A) &\leq \sum_i \operatorname{diam}(U_i)^s \\ &\leq 10^{n_{i-1}} (2 \cdot 10^{-n_i})^s \\ &= 2^s 10^{n_{i-1} - s n_i}. \end{aligned}$$

Wähle $s_i = 1/i$ und $n_i > 2n_{i-1}/s_i$, z.B. $n_i = i^2 n_{i-1}$. Dann gilt

$$h^{1/i}(A) \leq 10^{-n_i}$$

und somit

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = 0.$$

Analog zeigen wir $\dim_{\mathrm{H}}(B) = 0$ (durch Ersetzen des Wortes „gerade“ durch das Wort „ungerade“ und von A durch B in obigem Argument).

Weiterhin ist $A \times B = [0,1]$ und hat somit die Dimension 1.

(Genauer: Die Abbildung $A \times B \to [0,1]$, $(a,b) \mapsto a + b$ ist 1-Lipschitz und surjektiv, somit ist $\dim_{\mathrm{H}}(A \times B) \geq \dim_{\mathrm{H}}([0,1]) = 1$.) $\square$