Übungen zur Vorlesung
Einführung in dynamische Systeme
Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 1:
a) Zeigen Sie:

$$d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda^{-|i|}|\alpha_i - \omega_i|$$

ist für jedes $\lambda > 1$ eine Metrik auf der Menge Ω_N aller **zweiseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0,1,\dots,N-1\}$.

Lösung: $d_{\lambda,N}$ ist offensichtlich symmetrisch. Klar ist auch, dass $d_{\lambda,N}(\alpha,\alpha) = 0$.

Sei nun $d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) = 0$. Dann sind alle Summanden Null und somit gilt $\alpha_i = \omega_i$ für alle i, also ist $\alpha = \omega$.

Wegen der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen (hier sogar ganze Zahlen)

$$|\alpha_i - \omega_i| \le |\alpha_i - \theta_i| + |\theta_i - \omega_i|$$

folgt durch Multiplikation mit $\lambda^{-|i|}$ und Aufsummieren über i die Dreiecksungleichung für $d_{\lambda,N}$:

$$d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) \le d_{\lambda,N}(\alpha,\theta) + d_{\lambda,N}(\theta,\omega).$$

b) Zeigen Sie: Für alle $\lambda > 2N-1$ ist für jede Wahl von $\alpha_{-n},\dots,\alpha_n \in \{0,1,\dots,N-1\}$ der **Zylinder** $Z_{\alpha_{-n},\dots,\alpha_n} = \{\omega \in \Omega_N : \omega_{-n} = \alpha_{-n},\dots,\omega_n = \alpha_n\} \subset \Omega_N$ ein offener Ball mit Radius λ^{-n} in Ω_N bezüglich der Metrik $d_{\lambda,N}$.

Lösung: Sei zunächst $\alpha,\omega \in Z_{\alpha_{-n},\dots,\alpha_n}$. Dann ist für $\lambda > 2N-1$:

$$\begin{aligned}
d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda^{-|i|}|\alpha_i - \omega_i| \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z},\, i>n} \lambda^{-|i|}|\alpha_i - \omega_i| \\
&\le \sum_{i\in\mathbb{Z},\, i>n} \lambda^{-|i|}(N-1) \\
&\le 2(N-1) \sum_{i\in\mathbb{N},\ i>n} \lambda^{-i} \\
&= 2(N-1)\lambda^{-(n+1)} \frac{1}{1-1/\lambda} \\
&= 2(N-1)\lambda^{-(n+1)} \frac{\lambda}{\lambda-1} \\
&< \lambda^{-n}.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $\lambda > 2N-1$ wurde im letzten Schritt benutzt.

Sei nun $\alpha \in Z_{\alpha_{-n},\dots,\alpha_n}$ und $\omega \notin Z_{\alpha_{-n},\dots,\alpha_n}$. Dann gibt es ein j mit $|j| \le n$, so dass $\alpha_j \neq \omega_j$. Also ist $|\alpha_j - \omega_j| > 1$ und somit

$$\begin{aligned} d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda^{-|i|}|\alpha_i - \omega_i| \\ &\ge \lambda^{-|j|}|\alpha_j - \omega_j| \\ &\ge \lambda^{-n}. \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie: Für $\lambda > N$ ist der Zylinder $Z_{\alpha_0,\dots,\alpha_n} \subset \Omega_N^R$ ein offener Ball mit Radius λ^{-n} bezüglich der Metrik $d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) := \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \lambda^{-i}|\alpha_i - \omega_i|$ auf der Menge Ω_N^R aller **einseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

Lösung: Das ist fast dieselbe Rechnung wie in der vorigen Aufgabe. Wenn $\alpha, \omega \in Z_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}$, dann ist für $\lambda > N$:

$$\begin{aligned} d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) &= \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \lambda^{-i}|\alpha_i - \omega_i| \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N},\ i>n} \lambda^{-i}|\alpha_i - \omega_i| \\ &\le \sum_{i\in\mathbb{N},\ i>n} \lambda^{-i}(N-1) \\ &= (N-1)\lambda^{-(n+1)}\frac{1}{1-1/\lambda} \\ &= (N-1)\lambda^{-(n+1)}\frac{\lambda}{\lambda-1} \\ &< \lambda^{-n}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\lambda > N$ wurde wieder im letzten Schritt benutzt.

Sei nun $\alpha \in Z_{\alpha_{-n},\dots,\alpha_n}$ und $\omega \notin Z_{\alpha_{-n},\dots,\alpha_n}$. Dann gibt es wieder ein j mit $0 \le j \le n$, so dass $\alpha_j \neq \omega_j$. Also ist $|\alpha_j - \omega_j| > 1$ und somit

$$\begin{aligned} d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) &= \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \lambda^{-i}|\alpha_i - \omega_i| \\ &\ge \lambda^{-|j|}|\alpha_j - \omega_j| \\ &\ge \lambda^{-n}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie: Für den **Shift-Operator** σ, der durch $(\sigma(\omega))_n := \omega_{n+1}$ definiert ist, gibt es überabzählbar viele nichtperiodische Punkte $\omega \in \Omega^R$ mit $\omega_i = 0$ für alle i gerade.

Lösung: Es gibt endlich viele periodische Punkte von des Shift-Operators mit Periode $n \in \mathbb{N}$, also abzählbar viele periodische Punkte beliebiger Periode. Aber Ω_R ist überabzählbar (siehe auch die Aufgabe zur Cantor-Menge auf Aufgabenblatt 3).

Wenn wir nur diejenigen $\omega \in \Omega^R$ betrachten mit $\omega_i = 0$ für alle i gerade, dann sind das immer noch überabzählbar viele.

b) Geben Sie explizit ein solches ω an.

Lösung: Z.B. folgendes ω: Für alle i gerade setzen wir natürlich $\omega_i = 0$. An die Stellen $i = 1, 3, 5, 7, \ldots$ setzen wir (von links nach rechts) erst eine Ziffer 0, dann eine 1, dann zwei Ziffern 0, dann eine 1, dann drei Ziffern 0, dann eine 1, usw. Dieses ω ist nicht periodisch, da die Lücken zwischen den Ziffern 1 beliebig lang wird.

Aufgabe 3:
Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl der periodischen Punkte der Periode n des Shift-Operators σ auf der Menge $X = \{\omega \in \Omega = \Omega_2 : \omega_i = 0 \text{ für alle } i \text{ gerade}\}$.

Lösung: Sei p_n die gesuchte Zahl. Für n ungerade kommt nur $\omega = 0$ in Frage. Für n gerade ist die Zahl gleich der Zahl der periodischen Punkte der Periode $\frac{n}{2}$ des Shift-Operators auf der ganzen Menge Ω, also $2^{(n/2)}$. Also ist

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in 2\mathbb{N} \\ 2^{(n/2)} & \text{für } n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Aufgabe 4:
Sei G die **G-förmige Hufeisen-Büroklammer**

$$G : \Lambda \to \Lambda, \quad G(x,y) := \begin{cases} \left(3x, \frac{y}{3}\right) & \text{für } x \leq 1/3 \\ \left(3x-2, \frac{y+2}{3}\right) & \text{für } x \geq 2/3 \end{cases}$$

auf dem G-invarianten Cantor-Staub $\Lambda = C \times C = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i([0,1]^2)$. Sei $h : \Omega \to \Lambda$ die Konjugation zwischen G und dem Shift auf Ω, definiert durch $\omega \mapsto h(\omega) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n}(V_{\omega_n})$, wobei $V_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0,1]$ und $V_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times [0,1]$.

Finden Sie $n \in \mathbb{N}_0$ und einen Zylinder $Z_{\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n} \subset \Omega$ mit $h(Z_{\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n}) = \Lambda \cap R$, für das Rechteck $R = \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Tipp: Wenn $x \in \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]$ und $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, welche Ziffern von x, y sind dann in der triadischen Darstellung festgelegt?

Lösung: Wenn $x \in \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]$, dann ist in der triadischen Darstellung

$$x = 0.20\ldots$$

und wenn $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, dann gilt in der triadischen Darstellung, dass

$$y = 0.0\ldots.$$

Es sind also 2 (Nachkomma-)Ziffern von x und eine von y festgelegt. Insgesamt ist also der Zylinder Z durch 3 Ziffern bestimmt. Diese könnte man schon durch Ausprobieren finden (8 Kombinationen) oder durch folgende Überlegung:

- Das Bild von V_0 unter G ist $[0,1] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$,
- das Bild von V_1 unter $G^0 = id$ ist $V_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times [0,1]$,
- das Bild von V_0 unter G^{-1} ist $\left(\left[0, \frac{1}{9}\right] \times [0,1]\right) \cup \left(\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \times [0,1]\right)$.

Also ist

$$R = G^1(V_0) \cap G^0(V_1) \cap G^{-1}(V_0).$$

Mit anderen Worten:

$$R = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 1} G^{-n}(V_{\omega_n})$$

mit

$$\omega_{-1} = 0,$$
$$\omega_0 = 1,$$
$$\omega_1 = 0.$$

Damit gilt

$$\lambda \cap R = \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G^{-n}(V_{\omega_n}) : \ \omega \text{ Fortsetzung von } \omega_{-1} = 0, \ \omega_0 = 1, \ \omega_1 = 0 \right\}.$$

Also ist der gesuchte Zylinder gleich

$$Z_{\omega_{-1},\, \omega_0,\, \omega_1} \text{ mit } \omega_{-1} = 0, \omega_0 = 1, \omega_1 = 0.$$