Übungen zur Vorlesung

Einführung in dynamische Systeme

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 1:
a) Beweisen Sie: Wenn die Abbildung f zu der Abbildung $\tilde{f}$ C^k-konjugiert ist ($k \geq 0$) und die Abbildung g zu $\tilde{g}$, dann auch die Produktabbildung $f \times g$ zu $\tilde{f} \times \tilde{g}$.
(Für zwei Abbildungen f, g ist die Produktabbildung gegeben durch $(f \times g)((x, y)) = (f(x), g(y))$.)

Lösung: Wenn h, h' C^k-Diffeomorphismen sind (bzw. Homöomorphismen für $k = 0$) dann ist auch $h \times h'$ wieder ein solcher: Bijektivität folgt aus der Bijektivität von h, h'. Wenn h, h' C^k sind, dann auch das Produkt, und wenn h^{-1}, h'^{-1} C^k sind, dann auch $h^{-1} \times h'^{-1}$.

Wenn nun gilt

$$f \circ h = h \circ \tilde{f},$$
$$g \circ h' = h' \circ \tilde{g}$$

dann folgt

$$(f \times g) \circ (h \times h') = (h \times h') \circ (\tilde{f} \times \tilde{g}).$$

b) Beweisen Sie: Wenn der Fluss φ zu dem Fluss $\tilde{\varphi}$ C^k-konjugiert ist ($k \geq 0$) und der Fluss ψ zu $\tilde{\psi}$, dann auch der Produktfluss $\varphi \times \psi$ zu $\tilde{\varphi} \times \tilde{\psi}$.
(Der Produktfluss von zwei Flüssen φ, ψ ist $(\varphi \times \psi)_t((x, y)) = (\varphi_t(x), \psi_t(y))$.)

Lösung: Dasselbe Argument wie in Teilaufgabe (a) mit f ersetzt durch φ_t usw. liefert eine Konjugation h für jeden Wert von t. Diese h sind alle gleich wegen der Flusseigenschaft, denn wenn $\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h$, dann gilt das auch für Vielfache von t.

c) Widerlegen Sie: Wenn der Fluss φ zu dem Fluss $\tilde{\varphi}$ Orbit-äquivalent ist und der Fluss ψ zu $\tilde{\psi}$, dann auch der Produktfluss $\varphi \times \psi$ zu $\tilde{\varphi} \times \tilde{\psi}$.

Lösung: Sei auf $\mathbb{T}^1$ folgende Flüsse definiert:

$$\varphi_t([x]) = [x + t], \quad \tilde{\varphi} = \varphi = \psi, \quad \psi_t(x) = [x + \pi t].$$

Dann ist φ trivialerweise zu $\tilde{\varphi} = \varphi$ Orbit-äquivalent. $\tilde{\psi}$ ist zu ψ Orbit-äquivalent, da $\tilde{\psi}_t = \psi_{\sigma(t)}$ mit $\sigma(t) := \pi \cdot t$. Orbit-Äquivalenz bildet periodische Orbits auf periodische Orbits ab. Aber für den Produktfluss $\varphi \times \psi$ ist jedes Orbit periodisch mit Periode 1, während $\tilde{\varphi} \times \tilde{\psi}$ keine periodischen Orbits hat (siehe auch letztes Übungsblatt).

Aufgabe 2:
Beweisen Sie: Die Poincaréabbildung einer Suspension ist topologisch konjugiert zu der ursprünglichen Abbildung.

D.h. wenn $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus ist ist, ψ der Suspensionsfluss auf $X = (M \times [0,1])/\sim$ mit $(x,1) \sim (f(x),0)$, wenn $s \in [0,1]$ und $S := \{[(x,s)] : x \in M\} \subset X$, dann ist S ein globaler Schnitt von ψ und die die Poincaré-Abbildung P auf S erfüllt $P = h^{-1} \circ f \circ h$ mit einem Homöomorphismus $h : S \mapsto M$.

Lösung:

$$h : S \to M, \quad [(x,s)] \mapsto \begin{cases} x & \text{für } s \in [0,1) \\ f(x) & \text{für } s = 1 \end{cases}$$

ist eine wohldefinierte Abbildung. Es gilt

$$P([x,s]) = [(f(x),s]$$

und somit

$$P = h^{-1} \circ f \circ h.$$

h ist ein Homöomorphismus, da bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung $h^{-1} : x \mapsto [(x,s)]$ stetig.

Aufgabe 3:
Widerlegen Sie: Die Suspension einer Poincaréabbildung ist topologisch konjugiert zu dem ursprünglichen Fluss.

D.h. finden Sie einen Fluss φ, einen globalen Schnitt S, die zugehörige Poincaré-Abbildung $P : S \to S$ und den Suspensionsfluss ψ von P, so dass es keinen Homöomorphismus h gibt, so dass für alle x, t gilt: $\varphi_t(x) = h^{-1}(\psi_t(h(x)))$.

Lösung: Der Fluss φ zu

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = r$$

(in Polarkoordinaten), oder allgemeiner

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} \text{ nicht konstant in } r,$$

definiert auf $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ einen Fluss mit globalem Schnitt $S = \{(x,0) : x \geq 0\}$. Alle Orbits sind periodisch, aber mit verschiedenen Perioden.

Es gilt $P(u) = u$ für alle $u \in S$. Somit sind für den Suspensionsfluss ψ alle Orbits auf $(S \times [0,1])/\sim$ periodisch mit Periode 1. Da topologische Konjugation die Periodenlänge unverändert läßt, sind φ und ψ nicht topologisch konjugiert.

Aufgabe 4:
Beweisen oder widerlegen Sie: Die Suspension einer Poincaréabbildung ist Orbit-äquivalent zu dem ursprünglichen Fluss.

Wenn $X = \mathbb{T}^2$, $S = \{[(0,y)] : 0 < y < 1 = 2\}$, $varphi_t(u) = u + t(1, \pi/100)$, dann ist die Wiederkehrzeit unstetig und es liegt ein Orbit von S nach S mit Wiederkehrzeit $100/2\pi$ direkt neben solchen mit Wiederkehrzeit 1, die beliebig nahe sind. Dort wird jede Bijektion h unstetig. Damit gibt es auch keine Orbit-Äquivalenz.

Wenn dagegen zusätzlich noch die Wiederkehrzeit als stetig angenommen wird, gibt es eine Orbit-Äquivalenz.