Prof. Roland Gunesch Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung

Einführung in dynamische Systeme

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 1:
a) Für jedes $\mu > r(A)$ gibt es eine Lyapunov-Norm $||.||_L$ mit $||A||_L < \mu$. Somit folgt $||A^n||_L \leq ||A||_L^n < \mu^n$. Da in einem endlich-dimensionalen Raum alle Normen äquivalent sind, gilt $||A^n|| < C\mu^n$ für jede Norm. Als Limes ergibt sich $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} \leq \mu$. Da dies für alle $\mu > r(A)$ gilt, folgt $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} \leq r(A)$. Die umgekehrte Abschätzung ist analog, da $||A^n v|| = r(A)^n ||v||$ ist, somit für die Operatornorm $||A^n|| \geq r(A)^n$ gilt, also für eine beliebige Norm $||A^n|| \geq Cr(A)^n$ und $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} \geq r(A)$.

b) Der Spektralradius ist < 1 und somit A eine Kontraktion, $E^s = \mathbb{R}^n$, $E^u = \{0\} = E^0$, also $\dim(E^s) = n,\ \dim(E^u) = \dim(E^0) = 0$.

Aufgabe 2:
a) Es gibt überabzählbar viele unendliche Folgen in $\{0, 2\}$. Wenn

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

dann ist

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} \neq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n 3^{-n},$$

denn wenn k die erste Stelle ist, an der sich a und b unterscheiden, dann ist

$$|\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n} - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n 3^{-n}| \geq 3^{-k} - \sum_{n>k} 2 \cdot 3^{-n} > 0.$$

b)

$$f(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}) := (\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{2n} 3^{-2n}, \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{2n+1} 3^{-(2n+1)})$$

ist bijektiv, da

$$f^{-1}((\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n}, \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n 3^{-n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n 3^{-n}$$

mit

$$c_n = \begin{cases} a_{n/2} \text{ für } n \text{ gerade} \\ b_{(n-1)/2} \text{ für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

f ist stetig: Für $\varepsilon > 0$ sei k so groß, dass $3^{-k} < 2\varepsilon$ und wähle $0 < \delta < 3^{-2k} - \sum_{n>2k} 2 \cdot 3^{-n} > 0$. Dann gilt für $x = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n 3^{-n},\ y = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n 3^{-n}$

mit $|x-y|<\delta$, dass die ersten $2k$ Stellen von x und y übereinstimmen. Somit ist

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(a_{2n}-b_{2n})3^{-2n}|+|\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(a_{2n+1}-b_{2n+1})3^{-(2n+1)}| \\ &= |\sum_{n>k}(a_{2n}-b_{2n})3^{-2n}|+|\sum_{n>k}(a_{2n+1}-b_{2n+1})3^{-(2n+1)}|<\varepsilon.\end{aligned}$$

f^{-1} ist stetig: Für $\varepsilon>0$ sei k so groß, dass $3^{-k}<\varepsilon$ und wähle $0<\delta<3^{-k}-\sum_{n>k}2\cdot 3^{-n}>0$. Dann gilt für $x=(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}a_n3^{-n},\sum_{n\in\mathbb{N}_0}b_n3^{-n}),\ y=(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}a'_n3^{-n},\sum_{n\in\mathbb{N}_0}b'_n3^{-n})$ mit $|x-y|<\delta$ in der Summennorm, dass die ersten k Stellen von x und y in beiden Koordinaten übereinstimmen. Somit ist

$$|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0}|c_n-c'_n|3^{-n}<\sum_{n>k}|c_n-c'_n|3^{-n}<\varepsilon.$$

mit

$$c_n=\begin{cases}a_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade}\\ b_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,}\end{cases}$$
$$c'_n=\begin{cases}a'_{n/2} & \text{für } n \text{ gerade}\\ b'_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Aufgabe 3:
a) Für differenzierbare Funktionen θ ist das klar, da

$$\det Df=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{d\theta}{dx} & 1\end{pmatrix}\equiv 1.$$

Es gilt aber auch für beliebige Funktionen θ, da das Volumenelement auf dem Torus gleich dem Volumenelement $d\mathrm{vol}=dxdy$ im $\mathbb{R}^2$ ist und daher

$$\mathrm{vol}(f(A))=\int_{x\in[0,1)}\int_{y\in[0,1),(x,y)\in f(A)}=\int_{x\in[0,1)}\int_{y\in[0,1),(x,y-\theta)\in A}=\int_{x\in[0,1)}\int_{y\in[0,1),(x,y)\in A}=\mathrm{vol}(A).$$

b)

$$\det Df=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\frac{d\theta}{dx}\end{pmatrix},$$

was z.B. für $\theta(y)=\cos(y)^2$ nicht $\equiv 1$ ist.

Aufgabe 4:
a) $\mathrm{div} f=0$.

b) $\mathrm{div} f=a+b$; dies ist genau für $a=-b$ Null, unabhängig von x,y.