SKRIPTUM ZUR VORLESUNG MATHEMATIK II FÜR PHYSIKER UND PHYSIKERINNEN IM SOMMERSEMESTER 2012

STEFAN GESCHKE

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Mathematik II für Physiker und Physikerinnen beschäftigen wir uns mit Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$. Am Ende werden auch noch unendlich-dimensionale Hilberträume diskutiert. Die Vorlesung wird sich hauptsächlich nach [2], [3] und [5] richten. Die anderen Bücher in der Literaturliste stellen eine gute Ergänzung dar.

Literatur

[1] G.B. Arfken, H.J. Weber, **Mathematical Methods for Physicists**, Academic Press, 2001.

[2] O. Forster, **Analysis 2, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Gewöhnliche Differentialgleichungen,** Vieweg Studium 31, Grundkurs Mathematik, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984.

[3] O. Forster, **Analysis 3, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen,** Vieweg Studium 52. Grundkurs Mathematik. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984.

[4] S. Hassani, **Mathematical Physics**, Springer, 1999.

[5] H. Heuser, **Lehrbuch der Analysis, Teil 2,** Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner Stuttgard, 1990.

[6] T. Räsch, **Mathematik der Physik für Dummies**, Wiley-VCH, 2011.

1. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

1.1. Metrische Räume und Topologie des $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1. Sei X eine Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \to [0, \infty),$$

so dass für alle $x, y, z \in X$ Folgendes gilt:

(1) $d(x, y) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = y$ ist.
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X. Für $x, y \in X$ ist $d(x, y)$ der **Abstand** von x und y. Oft sprechen wir auch einfach von einem metrischen Raum X, ohne die Metrik auf X explizit anzugeben.

Definition 1.2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$$

heißt **Norm**, falls für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Folgendes gilt:

(1) $||x|| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Ist $|| \cdot ||$ eine Norm auf dem reellen Vektorraum V, so ist $(V, || \cdot ||)$ ein **normierter Vektorraum**.

Satz 1.3. *Ist* $(V, || \cdot ||)$ *ein normierter Vektorraum, so ist die Abbildung*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto ||x - y||$$

eine Metrik auf V.

Beispiel 1.4. Auf $\mathbb{R}^n$ betrachtet man verschiedene Normen. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

die **Maximumsnorm** von x. Für $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ sei

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

die **p-Norm** von x. Für $p = 2$ erhält man die **euklidische Norm**, die die **euklidische Metrik** auf $\mathbb{R}^n$ induziert. Wann immer wir nichts anderes schreiben, betrachten wir die euklidische Norm und Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $a \in X$ und $r > 0$ sei

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

die **offene Kugel** um a mit Radius r.

Eine Menge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ existiert. Insebesondere ist $B(x, \varepsilon)$ selbst Umgebung von x, die **ε-Umgebung** von x.

Satz 1.6 (Hausdorffsches Trennungsaxiom)**.** *Sei X metrischer Raum und $x, y \in X$ verschieden. Dann existieren Umgebungen U und V von x bzw. y mit $U \cap V = \emptyset$.*

Definition 1.7. Eine Teilmenge U eines metrischen Raums X heißt **offen**, falls U Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h., wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ existiert.

Beispiel 1.8. Offene Kugeln $B(a, r)$ sind offen.

Ein Interval der Form $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ist offen bzgl. der üblichen Metrik $(x, y) \mapsto |x - y|$.

Bemerkung 1.9. Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen bzgl. der Maximumsnorm, wenn sie bzgl. der euklidischen Norm offen ist.

Satz 1.10. *Sei X ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *$\emptyset$ und X sind offene Teilmengen von X.*
(2) *Sind U und V offene Teilmengen von X, so auch $U \cap V$.*
(3) *Sei I eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei U_i eine offene Teilmenge von X. Dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.*

Man kann auch den Begriff der Metrik unterdrücken und nur die Familie der offenen Mengen auf einem Raum betrachten.

Definition 1.11. Sei X eine Menge. Eine Familie τ von Teilmengen von X heißt **Topologie** auf X, falls Folgendes gilt:

(1) $\emptyset, X \in \tau$
(2) Für alle $U, V \in \tau$ ist $U \cap V \in \tau$.
(3) Sei I eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei $U_i \in \tau$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Ist τ eine Topologie auf X, so ist (X, τ) ein **topologischer Raum**. Die Elemente von τ sind die **offenen** Teilmengen von X.

Eine Teilmenge U eines topologischen Raums ist Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls eine offene Menge $O \subseteq X$ mit $x \in O \subseteq U$ existiert. Ein topologischer Raum ist **Hausdorff**, falls je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.

Bemerkung 1.12. Wie in einem metrischen Raum ist eine Teilmenge eines topologischen Raums genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Die offenen Mengen eines metrischen Raums X bilden eine Topologie auf X, die von der Metrik **induzierte** Topologie. Nicht jede Topologie wird von einer Metrik induziert. Satz 1.6 besagt, dass von Metriken induzierte Topologien Hausdorff sind.

Bemerkung 1.9 besagt, dass die euklidische Metrik und die zur Maximumsnorm gehörende Metrik auf $\mathbb{R}^n$ dieselben Topologien induzieren.

Definition 1.13. Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Für eine Teilmenge Y von X heißt ein Punkt $x \in Y$ **Randpunkt** von Y, falls jede Umgebung von x sowohl Elemente von Y als auch von $X \setminus Y$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von Y bildet den **Rand** von Y und wird mit ∂Y bezeichnet.

Satz 1.14. *Sei X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann gelten folgende Aussagen:*
(1) *Die Menge $Y \setminus \partial Y$ ist offen.*
(2) *Die Menge $Y \cup \partial Y$ ist abgeschlossen.*
(3) *Die Menge ∂Y ist abgeschlossen.*

Definition 1.15. Sei X metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann heißen $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$ das **Innere** von Y und $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ der **Abschluss** von Y.

1.2. **Grenzwerte und Stetigkeit.**

Definition 1.16. Sei X ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in X. Die Folge konvergiert gegen einen Punkt $x \in X$, falls für jede Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $x_n \in U$.

Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, so heißt x der **Grenzwert** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Bemerkung 1.17. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Satz 1.18. *Eine Folge $((x_k^1, \dots, x_k^n))_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, wenn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Folge $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x^i konvergiert.*

Satz 1.19. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge in A, die gegen einen Punkt in X konvergiert, bereits gegen einen Punkt in A konvergiert.*

Definition 1.20. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **Cauchy**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Bemerkung 1.21. Jede konvergente Folge ist Cauchy.

Definition 1.22. Ein metrischer Raum X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X gegen einen Punkt in X konvergiert. Ein normierter Vektorraum, der bzgl. der von der Norm induzierten Metrik vollständig ist, heißt **Banachraum**.

Satz 1.23. *$\mathbb{R}^n$ ist vollständig (bzgl. der euklidischen Metrik).*

Bemerkung 1.24. Während die Eigenschaft einer Folge konvergent zu sein nur von der Topologie abhängt, hängt die Eigenschaft Cauchy zu sein von der Metrik ab. Von zwei Metriken, die dieselbe Topologie erzeugen, kann eine vollständig sein, die andere nicht.

Satz 1.25. *Ist X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$, so ist A ebenfalls ein metrischer Raum mit der auf A eingeschränkten Metrik.*

a) Ist A ein vollständiger metrischer Raum, so ist A abgeschlossen in X.

b) Ist X vollständig, so ist A genau dann abgeschlossen in X, wenn A vollständig ist.

Definition 1.26. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann ist

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

der **Durchmesser** von A.

A heißt beschränkt, falls $\operatorname{diam}(A) < \infty$ ist.

Bemerkung 1.27. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) ist genau dann beschränkt, wenn es $a \in X$ und $r > 0$ gibt, so dass $A \subseteq B(a, r)$ gilt.

Satz 1.28. *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen von X mit*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0,$$

so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A_{n+1} \subseteq A_n$. Dann existiert genau ein Punkt $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Definition 1.29. Seien X und Y metrische Räume und $x \in X$. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **stetig im Punkt** x, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die gegen x konvergiert, gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Satz 1.30. *Sei d_X eine Metrik auf X, d_Y eine Metrik auf Y, $x \in X$ und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist stetig in x*

(2) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt: $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Etwas kompakter aufgeschrieben:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X (d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$$

(3) *Für jede Umgebung U von $f(x)$ ist $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x.*

Satz 1.31. *Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn jede offene Menge $O \subseteq Y$ ein offenes Urbild $f^{-1}[O]$ hat.*

Satz 1.32. *Seien X, Y und Z metrische Räume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.*

a) Sind f und g stetig, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig.

b) Ist f stetig in einem Punkt $x \in X$ und g stetig im Punkt $f(x)$, dann ist $g \circ f$ stetig im Punkt x.

Satz 1.33. *Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn jede* **Komponentenabbildung** *$f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, stetig ist, wobei die f_i dadurch bestimmt sind, dass für alle $x \in X$ gilt: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.*

Satz 1.34. *Folgende Abbildungen sind stetig:*

$$\begin{aligned} \mathrm{add} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y \\ \mathrm{mult} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x \cdot y \\ \mathrm{div} &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

Korollar 1.35. *Polynome in mehreren Veränderlichen sind stetig.*

Definition 1.36. Sei X eine Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von X nach Y. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f : X \to Y$, wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in X (d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon)$$

Satz 1.37. *Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen von einem metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$, so ist auch f stetig.*

Bemerkung 1.38. Sei X eine Menge. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist **beschränkt**, falls ein $K > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt: $|f(x)| \leq K$. $B(X)$ sei die Menge aller beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Für $f \in B(X)$ ist die **Supremumsnorm** $||f||_\infty$ definiert als $\sup\{|f(x)| : x \in X\}$. $(B(X), ||\cdot||_\infty)$ ist ein normierter Vektorraum. Die gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen in $B(X)$ ist äquivalent zur Konvergenz bzgl. der Supremumsnorm.

Satz 1.39. *Seien $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann stetig, wenn ein $c > 0$ existiert, so dass für alle $x \in V$ gilt:*

$$||f(x)||_W \leq c \cdot ||x||_V$$

Definition 1.40. Für eine stetige lineare Abbildung f zwischen normierten Vektorräumen $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ ist

$$||f|| = \sup\{||f(x)||_W : x \in V \wedge ||x||_V = 1\}$$

die **Norm** von f.

Bemerkung 1.41. Nach Satz 1.39 ist die Norm einer stetigen linearen Abbildung stets endlich. Ist $f : V \to W$ stetig und linear, so gilt für alle $x \in V$:

$$||f(x)||_W \leq ||f|| \cdot ||x||_V$$

Beispiel 1.42. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $C([a, b])$ der Raum der stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm.

a) Die Abbildung $I : C([a, b]) \to \mathbb{R}; f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist stetig mit Norm $(b - a)$.

b) Für $a < b$ sei $C^1([a, b])$ der Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm. Die Abbildung

$$D : C^1([0, 1]) \to C([0, 1]); f \to f'$$

ist nicht stetig.

1.3. **Kompaktheit.**

Definition 1.43. Für eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen einer Menge X sei

$$\bigcup \mathcal{U} = \{x \in X : \text{ es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in U\}.$$

Ist $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, so ist $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Sei nun X ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen von X heißt **offene Überdeckung** von K, wenn alle $U \in \mathcal{U}$ offen sind und $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ gilt.

K heißt **kompakt**, wenn für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von K ein $n \in \mathbb{N}$ und $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ existieren, so dass bereits $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$ gilt. Wir nennen $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine **endliche Teilüberdeckung** von $\mathcal{U}$.

Bemerkung 1.44. K ist genau dann eine kompakte Teilmenge von X, wenn K eine kompakte Teilmenge des metrischen Raums K ist. Kompaktheit ist also unabhängig von dem umgebenden Raum.

Beispiel 1.45. Sei X ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt.

Lemma 1.46. *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig und beschränkt.*

Beweis. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, der nicht vollständig ist. Dann existiert eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in X nicht konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$U_n = \{x \in X : \exists\varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq m_0 (d(x_m, x) > 2^{-n} + \varepsilon)\}.$$

Die Mengen U_n sind offen und es gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Da X kompakt ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X = \bigcup_{n=0}^{k} U_n = U_k$. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ist, existiert aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, n' \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_{n'}) < \frac{1}{k}$. Damit ist $x_{n_0} \notin U_k$, ein Widerspruch.

Um zu zeigen, dass ein kompakter Raum beschränkt ist, wählen wir ein $x \in X$ und betrachten die Überdeckung $\{B(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Da diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $X = B(x, n)$. Damit ist X beschränkt. □

Definition 1.47. Ein metrischer Raum X ist **total beschränkt**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Kugeln vom Radius ε genügen, um X zu überdecken.

Satz 1.48 (Heine-Borel)**.** *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er total beschränkt und vollständig ist.*

Beweis. Es ist klar, dass jeder kompakte metrische Raum total beschränkt ist. Nach Lemma 1.46 ist jeder kompakte metrische Raum auch vollständig. Sei nun X ein metrischer Raum, der total beschränkt und vollständig ist, aber nicht kompakt.

Es sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Wir wählen nun eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X wie folgt. Setze $A_0 = X$.

Angenommen wir haben für ein $n \in \mathbb{N}$ schon eine Menge $A_n \subseteq X$ so gewählt, dass A_n nicht von endlich vielen Mengen in $\mathcal{U}$ überdeckt wird. Da X total beschränkt ist, existieren $k_n \in \mathbb{N}$ und $a_1^n, \dots, a_{k_n}^n \in X$ mit

$$A_n \subseteq B(a_1^n, 2^{-n}) \cup \dots \cup B(a_{k_n}^n, 2^{-n}).$$

Mindestens eine der Mengen $B(a_i^n, 2^{-n}) \cap A_n$ wird nicht von endlich vielen Elementen von $\mathcal{U}$ überdeckt. Wähle $i \in \{1, \dots, k_n\}$, so dass $B(a_i^n, 2^{-n}) \cap A_n$ nicht in der Vereinigung von endlich vielen Elementen von $\mathcal{U}$ und setze $A_{n+1} = \overline{B(a_i^n, 2^{-n}) \cap A_n}$.

Beachte, dass A_{n+1} einen Durchmesser $\leq 2^{-n+1}$ hat. Wegen $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ existiert genau ein $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X ist, existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B(x, 2 \cdot 2^{-n+1}) \subseteq U$. Wegen $x \in A_{n+1}$ und $\operatorname{diam}(A_{n+1}) \leq 2^{-n+1}$ gilt damit $A_{n+1} \subseteq U$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass A_{n+1} nicht in der Vereinigung von endlich vielen Elementen von $\mathcal{U}$ enthalten ist. □

Satz 1.49. *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Lemma 1.50. *Seien X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so auch $f[X]$.*

Korollar 1.51. *Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $K \subseteq X$ kompakt, so nimmt f auf K ein Minimum und ein Maximum an.*

Satz 1.52 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Ein metrischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat.*

Beweis. Angenommen, jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge. Wir zeigen, dass X vollständig und total beschränkt ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Ist x Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert die ganze Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits gegen x, da sie Cauchy ist. Damit ist X vollständig.

Angenommen, X ist nicht total beschränkt. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass X nicht die Vereinigung von endlich vielen ε-Kugeln ist. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \in X \setminus (B(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{n-1}, \varepsilon))$$

Diese Folge hat keine konvergente Teilfolge, ein Widerspruch.

Sei nun X kompakt. Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge. Dann existiert für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon_x > 0$, so dass in

$B(x, \varepsilon_x)$ nur endlich viele Glieder der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen. Die Familie $\{B(x, \varepsilon_x) : x \in X\}$ ist dann eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Ein Widerspruch. $\square$

Korollar 1.53. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Definition 1.54. Seien X und Y metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X (d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$$

Satz 1.55. *Seien X und Y metrische Räume, X kompakt. Dann ist jede stetige Funktion $f : X \to Y$ sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig und $\varepsilon > 0$. Wir bezeichnen offene Kugeln in X mit B_X und offene Kugeln in Y mit B_Y. Für jedes $x \in X$ wähle ein $\delta_x > 0$ mit $f[B_X(x, \delta_x)] \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon/2)$. Da X kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n$ mit

$$X = B_X(x_1, \delta_{x_1}/2) \cup \dots \cup B_X(x_n, \delta_{x_n}/2).$$

Sei $\delta = \min(\delta_{x_1}/2, \dots, \delta_{x_n}/2)$.

Nun sei $x \in X$. Dann existiert $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in B_X(x_i, \delta_{x_i}/2)$. Wegen $\delta \leq \delta_{x_i}/2$ und $d(x, x_i) < \delta_{x_i}/2$ gilt $B_X(x, \delta) \subseteq B_X(x, \delta_{x_i})$. Damit ist $f[B_X(x, \delta)] \subseteq B_Y(f(x_i), \varepsilon/2)$. Wegen $f(x) \in B_Y(f(x_i), \varepsilon/2)$ gilt $B_Y(f(x_i), \varepsilon/2) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$. Es ist also $f[B_X(x, \delta)] \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$. Das zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von f. $\square$

2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

2.1. Kurven im $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.1. Eine **Kurve** im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Das Intervall I kann dabei die Form $[b, c]$, $[b, d)$, $(a, c]$ oder (a, d) haben, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b < c < d$.

Jede Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ wird durch n Komponentenabbildungen $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, mit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ für alle $x \in I$ gegeben. Die Kurve f ist (**stetig**) **differenzierbar**, wenn alle f_i (stetig) differenzierbar sind.

Ist $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $t \in I$, so ist $f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t))$ der **Tangentialvektor** der Kurve f zum **Parameterwert** t. Der Vektor $\frac{f'(t)}{||f'(t)||}$ ist der **Tangenteneinheitsvektor**.

Eine stetig differenzierbare Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **regulär**, wenn alle $f'(t)$, $t \in I$, von 0 verschieden sind. Ein Parameterwert $t \in I$ mit $f'(t) = 0$ heißt **singulär**.

Beispiel 2.2. Seien $f : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $g : I_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei reguläre Kurven. Für die Parameterwerte $t_1 \in I_1$ und $t_2 \in I_2$ gelte $f(t_1) = g(t_2)$. Dann versteht man unter dem **Schnittwinkel** ϑ der Kurven f und g bei den Parameterwerten t_1 und t_2 den Winkel zwischen den Tangentialvektoren $f'(t_1)$ und $g'(t_2)$. Der Winkel ϑ wird bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\vartheta = \frac{\langle f'(t_1), g'(t_2)\rangle}{||f'(t_1)|| \cdot ||g'(t_2)||}.$$

Definition 2.3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Weiter seien $t_0, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ und $\delta > 0$. Dann sind $t_0, \ldots, t_k$ eine **Unterteilung** von $[a, b]$ mit **Feinheit** δ, wenn für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt: $t_i - t_{i-1} < \delta$.

Die Kurve f heißt **rektifizierbar** mit Länge L, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Unterteilung $t_0, \ldots, t_k$ von $[a, b]$ mit Feinheit δ gilt:

$$\left| L - \sum_{i=1}^{k} ||f(t_i) - f(t_{i-1})|| \right| < \varepsilon$$

Satz 2.4. *Jede stetig differenzierbare Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar mit Länge*

$$L = \int_a^b ||f'(t)||dt.$$

Definition 2.5. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Weiter sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ eine bijektive stetige Abbildung. Dann ist $f \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ wieder eine Kurve, die durch die **Parametertransformation** aus f hervorgeht. Sind sowohl φ als auch φ^{-1} stetig differenzierbar, so nennt man φ eine C^1-Parametertransformation.

Bemerkung 2.6. Ist $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ eine Parametertransformation, so ist φ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Im ersten Fall heißt φ **orientierungserhaltend**, im zweiten **orientierungsumkehrend**.

Ist φ eine C^1-Parametertransformation, so gilt für alle $t \in [a,b]$: $\varphi'(t) \neq 0$. In diesem Fall ist φ genau dann orientierungserhaltend, wenn für alle $t \in [a,b]$ gilt: $\varphi'(t) > 0$.

Ist $f : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve und $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ eine C^1-Parametertransformation, so gilt für $g = f \circ \varphi$ und alle $t \in [a,b]$:

$$g'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Insbesondere ist der Tangentialvektor von g beim Parameterwert t ein skalares Vielfaches des Tangentialvektors von f beim Parameterwert $\varphi(t)$. Die entsprechenden Tangenteneinheitsvektoren sind gleich, falls φ orientierungserhaltend ist, und sonst entgegengesetzt gleich.

Wegen der Rektifizierbarkeit der Kurven f und g sind ihre Längen gleich. Es gilt also

$$\int_a^b ||g'(t)||dt = \int_a^b ||f'(\varphi(t))|| \cdot |\varphi'(t)|dt = \int_c^d ||f'(s)||ds.$$

2.2. **Partielle Ableitungen.** Bisher haben wir Ableitungen von Kurven, also von Funktionen von einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$, betrachtet. Jetzt wenden wir uns Ableitungen von Funktionen von einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ zu.

Definition 2.7. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der **Graph** von f ist die Menge

$$\{(x,y) \in U \times \mathbb{R} : f(x) = y\}.$$

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$$N_f(c) = \{x \in U : f(x) = c\}$$

die **Niveaumenge** von f zum Wert c. Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch Höhenlinien.

Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge 1. Dann ist folgender Grenzwert, falls erüberhaupt existiert, die **Richtungsableitung** von f an der Stelle a in Richtung v:

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

Die Richtungsableitungen in Richtung der Einheitsvektoren e_i heißen **partielle Ableitungen** von f an der Stelle a und werden mit $D_i f(a)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ bezeichnet.

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar** wenn auf ganz U alle partiellen Ableitungen existieren. Die Funktion f heißt stetig differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen auf ganz U existieren und stetig sind.

Bemerkung 2.8. Die i-te partielle Ableitung von f im Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ lässt sich berechnen, in dem man die Abbildung

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

im Punkt a_i ableitet.

Beispiel 2.9. Sei $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2} + x_1^3 + x_2^2$. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = e^{2a_2} + 3a_1^2$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 2a_1 e^{2a_2} + 2a_2$.

Definition 2.10. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

der **Gradient** von f im Punkt x.

Anstelle von $\operatorname{grad} f$ schreibt man auch ∇f und fasst ∇ als vektorwertigen **Differentialoperator** $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ auf.

Satz 2.11. *a) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Element und $g : I \to U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ genügend differenzierbare Abbildungen. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$(f \circ g)'(x) = \langle \operatorname{grad} f(g(x)), g'(x) \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das übliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

b) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ genügend differenzierbare Abbildungen. Dann ist

$$\operatorname{grad}(fg) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g.$$

Teil a) dieses Satzes ist eine Instanz der Kettenregel im Höherdimensionalen, die wir später beweisen.

Definition 2.12. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Vektorfeld** auf U ist eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$. Der Gradient einer partiell differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist also ein Vektorfeld.

Ist $v : U \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, d.h., sind alle Komponentenfunktionen $v_i : U \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, partiell differenzierbar, so heißt die Funktion

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

die **Divergenz** des Vektorfeldes v.

Bemerkung 2.13. Rein formal ist $\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sind $f : U \to \mathbb{R}$ und $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle + f \operatorname{div} v$$

beziehungsweise

$$\langle \nabla, fv \rangle = \langle \nabla f, v \rangle + f \langle \nabla, v \rangle.$$

Definition 2.14. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Die Funktion f ist 1-mal partiell differenzierbar, wenn sie partiell differenzierbar ist. Die Funktion f ist 1-mal stetig partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen stetig sind. Für $n > 1$ ist f n-mal (stetig) partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen von f $(n-1)$-mal (stetig) partiell differenzierbar sind.

Satz 2.15. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $a \in U$:*

$$D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a)$$

Beweis. Wir können $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$ und $a = (0,0)$ annehmen. Anstelle von (x_1, x_2) schreiben wir (x, y). Zunächst wählen wir $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \subseteq U$. Für $y \in \mathbb{R}$ sei $F_y(x) = f(x, y) - f(x, 0)$.

Sei nun $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (-\delta, \delta)$ mit $|\xi| \leq |x|$ und $F_y(x) - F_y(0) = x \cdot F_y'(\xi)$. Es gilt $F_y'(\xi) = D_1 f(\xi, y) - D_1 f(\xi, 0)$. Der Mittelwertsatz, angewendet auf die Funktion $y \mapsto D_1 f(\xi, y)$ liefert ein $\eta \in (-\delta, \delta)$ mit $|\eta| \leq |y|$ und $D_1 f(\xi, y) - D_1 f(\xi, 0) = y \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) &= F_y(x) - F_y(0) \\ &= x \cdot F_y'(\xi) = x(D_1 f(\xi, y) - D_1 f(\xi, 0)) = xy \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Analog existieren $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in (-\delta, \delta)$ mit $|\bar{\xi}| \leq |x|$, $|\bar{\eta}| \leq |y|$ und

$$f(x,y) - f(0,y) - f(x,0) + f(0,0) = xy \cdot D_1 D_2 f(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

Für $xy \neq 0$ ergibt sich

$$D_1 D_2 f(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = D_2 D_1 f(\xi, \eta).$$

Dabei hängen ξ, $\bar{\xi}$, η und $\bar{\eta}$ von x und y ab. Lässt man nun (x,y) gegen $(0,0)$ laufen, so streben auch (ξ, η) und $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ gegen $(0,0)$. Aus der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen von f folgt nun

$$D_1 D_2 f(0,0) = D_2 D_1 f(0,0).$$

□

Bemerkung 2.16. Man schreibt für $D_i D_j f$ auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Für $D_i D_i f$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Definition 2.17. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $v : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld mit Komponentenfunktionen $v_i : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$. Dann ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

die **Rotation** von v. Formal kann man $\operatorname{rot} v$ auffassen als das Vektorprodukt $\nabla \times v$.

Bemerkung 2.18. Ist $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$. Damit ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld v Gradientenfeld einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sein kann, muss also $\operatorname{rot} v = 0$ gelten.

Definition 2.19. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann setzt man

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Dabei heißt Δ der **Laplace-operator**. Die Differentialgleichung $\Delta f = 0$ heißt **Potentialgleichung** und ihre Lösungen **harmonische Funktionen**.

2.3. **Totale Differenzierbarkeit.** Wir interpretieren Differenzierbarkeit als Approximierbarkeit durch lineare Abbildungen und verallgemeinern die Differenzierbarkeit reeller Funktionen auf Funktionen von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

Definition 2.20. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x \in U$ **(total) differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ des Nullvektors und eine Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass Folgendes gilt:

(1) Für alle $\xi \in V$ ist
$$f(x + \xi) = f(x) + A(\xi) + \varphi(\xi).$$

(2)
$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{||\xi||} = 0$$

Bemerkung 2.21. a) Die lineare Abbildung A in der Definition der Differenzierbarkeit von f im Punkt x ist die **Ableitung** von f an der Stelle x. A lässt sich als Matrix auffassen und wir können anstelle von $A(\xi)$ einfach $A\xi$ schreiben.

b) Ist φ auf einer Umgebung von 0 definiert und gilt
$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{||\xi||} = 0,$$
so verwendet man die Schreibweise $\varphi(\xi) = o(||\xi||)$ und schreibt für die Gleichung $f(x + \xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi)$ auch
$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + o(||\xi||).$$

Satz 2.22. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Punkt $x \in U$ total differenzierbar ist mit der Ableitung $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Dann ist f stetig im Punkt x und alle Komponentenabbildungen $f_i : U \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, sind in x partiell differenzierbar mit $D_j f_i(x) = a_{ij}$.*

Definition 2.23. Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x \in U$, so nennt man die Matrix $A = (D_j f_i(x))_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ das **Differential**, die **Jakobi-** oder auch die **Funktionalmatrix** von f im Punkt x und bezeichnet die Matrix A mit $Df(x)$ oder $J_f(x)$.

Satz 2.24. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen von f seien stetig im Punkt x. Dann ist f total differenzierbar im Punkt x.*

Korollar 2.25. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Weiter seien die partiellen Ableitungen von f stetig im Punkt $x \in U$. Dann ist f in x total differenzierbar.*

Korollar 2.26. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f stetig.*

Satz 2.27 (Kettenregel)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen mit $g[U] \subseteq V$. Die Abbildung g sei im Punkt $x \in U$ differenzierbar und f sei im Punkt $y = g(x)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ im Punkt x differenzierbar und es gilt*

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

Satz 2.28. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für jedes $x \in U$ und jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$*

$$D_v f(x) = \langle v, \operatorname{grad} f(x)\rangle.$$

2.4. **Die Taylorformel im Höherdimensionalen.**

Definition 2.29. Für ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ natürlicher Zahlen sei $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$.

Ist f eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion, so setzt man

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f,$$

wobei $D_i^{\alpha_i}$ die α_i-te partielle Ableitung nach der i-ten Variablen bezeichnet.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Satz 2.30. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Seien $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x+t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq U$. Dann ist die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}; t \mapsto f(x+t\xi)$ k-mal stetig differenzierbar und es gilt*

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x+t\xi)\xi^\alpha.$$

Satz 2.31 (Taylorsche Formel)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\{x+t\xi : t \in [0,1]\} \subseteq U$. Weiter sei $k > 0$ und $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann existiert ein $\theta \in [0,1]$ mit*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha.$$

Korollar 2.32. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subseteq U$. Weiter sei $k > 0$ und $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $\xi \in B(x,\delta)$*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + o(||\xi||^k).$$

3. Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

3.1. **Das Riemannsche Integral im Höherdimensionalen.**

Definition 3.1. Ein **abgeschlossener Quader** im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, wobei $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ reelle Zahlen sind, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $a_i < b_i$. Mit $V(Q)$ bezeichnen wir das Volumen $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$ des Quaders Q.

Eine **Zerlegung** eines Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Folge $a = c^0 < c^1 < \cdots < c^k = b$. Eine Zerlegung Z eines Quaders $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ist ein Produkt

$$\{c_1^0, \ldots, c_1^{k_1}\} \times \cdots \times \{c_n^0, \ldots, c_n^{k_n}\}$$

von Zerlegungen der Intervalle $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$.

Für eine Zerlegung Z von Q wie oben sei $\mathcal{Q}(Z)$ die Menge aller Quader der Form $[c_1^{i_1-1}, c_1^{i_1}] \times \cdots \times [c_n^{i_n-1}, c_n^{i_n}]$ mit

$$(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, k_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, k_n\}.$$

Die **Feinheit** der Zerlegung Z ist der maximale Durchmesser eines Quaders in $\mathcal{Q}(Z)$.

Sei nun $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung von Q. Für jedes $P \in \mathcal{Q}(Z)$ sei ξ_P ein Element von P. Die zugehörige **Riemannsche Summe** ist definiert als

$$R(f, (\xi_P)_{P\in\mathcal{Q}(Z)}) = \sum_{P\in\mathcal{Q}(Z)} f(\xi_P) \cdot V(P).$$

Die Funktion f ist **Riemann-integrierbar**, falls $S \in \mathbb{R}$ exisitiert, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung von Q mit Feinheit $< \delta$ und jede Wahl von $\xi_P \in P$, $P \in \mathcal{Q}(Z)$, gilt:

$$|S - R(f, (\xi_P)_{P\in\mathcal{Q}(Z)})| < \varepsilon$$

In diesem Falle nennen wir S das **Integral** von f über Q und schreiben $\int_Q f(x)dx$ für f.

Wir definieren die **Untersumme** von f auf Q bezüglich Z als

$$U(f, Z) = \sum_{P\in\mathcal{Q}(Z)} \inf\{f(x) : x \in P\} \cdot V(P)$$

und die entsprechende **Obersumme** als

$$O(f, Z) = \sum_{P\in\mathcal{Q}(Z)} \sup\{f(x) : x \in P\} \cdot V(P).$$

Lemma 3.2. *Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von Q mit*

$$O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon.$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}\int_Q f(x)d(x) &= \sup\{U(f, Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}\\ &= \inf\{O(f, Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}.\end{aligned}$$

Beweis. Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $S = \int_Q f(x)dx$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung Z von Q mit Feinheit $< \delta$ und jede Wahl von $\xi_P \in P$, $P \in \mathcal{Q}(Z)$, gilt:

$$|S - R(f, (\xi_P)_{P\in\mathcal{Q}(Z)})| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Sei nun Z eine Zerlegung von Q mit Feinheit $< \delta$.

Wählt man für jedes $P \in \mathcal{Q}(Z)$ Punkte $\xi_P, \eta_P \in P$ mit

$$\sup\{f(x) : x \in P\} - f(\eta_P) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot V(Q)}$$

und

$$f(\xi_P) - \inf\{f(x) : x \in P\} < \frac{\varepsilon}{4 \cdot V(Q)},$$

so erhält man

$$O(f, Z) - R(f, (\xi_P)_{P \in \mathcal{Q}(Z)}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$R(f, (\eta_P)_{P \in \mathcal{Q}(Z)}) - U(f, Z) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nach Wahl von δ gilt

$$|R(f, (\xi_P)_{P \in \mathcal{Q}(Z)}) - R(f, (\eta_P)_{P \in \mathcal{Q}(Z)})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon.$$

Außerdem gilt $0 \leq S - U(f, Z) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $0 \leq O(f, Z) - S < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_Q f(x) d(x) &= \sup\{U(f, Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\} \\ &= \inf\{O(f, Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}. \end{aligned}$$

□

Definition 3.3. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine **Nullmenge** (eine Menge vom Maß 0), wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Quadern in $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$
(2) $\sum_{i=0}^{\infty} V(Q_i) < \varepsilon$

Man beachte, dass es bei dieser Definition egal ist, ob man offene oder abgeschlossene Quader betrachtet. Das Volumen eines offenen Quaders definieren wir auf die naheliegende Weise.

Satz 3.4. *Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.*

Definition 3.5. Für eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ und $x \in Q$ sei

$$\operatorname{osc}(f, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup_{\xi \in B(x, \varepsilon) \cap Q} f(\xi) - \inf_{\xi \in B(x, \varepsilon) \cap Q} f(\xi) \right)$$

die **Oszillation** von f an der Stelle x.

Beachte, dass f genau dann stetig im Punkt x ist, wenn $\operatorname{osc}(f,x)=0$ ist.

Satz 3.6 (Lebesguesches Integrabilitätskriterium)**.** *Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist.*

Beweis. Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $B_k = \{x \in Q : \operatorname{osc}(f,x) > 2^{-k}\}$. Falls die Menge der Unstetigkeitsstellen von f keine Nullmenge ist, so existiert $k \in \mathbb{N}$, so dass B_k keine Nullmenge ist. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass es keine Überdeckung von B_k mit abzählbar vielen Quadern vom Gesamtvolumen $< \varepsilon$ gibt.

Nun gilt für jede Zerlegung Z von Q

$$O(f,Z) - U(f,Z) > 2^{-k}\varepsilon,$$

ein Widerspruch zu Lemma 3.2.

Sei andererseits die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Außerdem sei $M \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass für alle $x \in Q$ die Ungleichung $-M \le f(x) \le M$ gilt. Dann existiert eine Folge $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von offenen Quadern, so dass alle Unstetigkeitsstellen von f in einem der Q_i liegen und außerdem

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} V(Q_i) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

gilt.

Für jedes $x \in Q$, so dass f stetig in x ist, wähle ein $\delta_x > 0$, so dass

$$\sup_{\xi\in B(x,\delta_x)\cap Q} f(x) - \inf_{\xi\in B(x,\delta_x)\cap Q} f(x) < \frac{\varepsilon}{2V(Q)}$$

gilt. Dann ist

$$\mathcal{O} = \{Q_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{B(x,\delta_x) : f \text{ ist stetig in } c\}$$

eine offene Überdeckung von Q. Da Q kompakt ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass jede für jede Zerlegung Z von Q mit Feinheit $< \delta$ und jedes $P \in \mathcal{Q}(Z)$ ein $U \in \mathcal{O}$ existiert mit $P \subseteq U$. Man sieht nun leicht, dass $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$ gilt. Für jede Wahl von $\xi_P \in P$, $P \in \mathcal{Q}(Z)$, gilt $U(f,Z) \le R(f,(\xi_P)_{P\in\mathcal{Q}(Z)}) \le O(f,Z)$.

Für je zwei Zerlegungen Z und Z' von Q gilt $U(f,Z) \leq O(f,Z')$. Damit existiert

$$S = \sup\{U(f,Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}.$$

Für jede Zerlegung Z von Q ist $U(f,Z) \leq S \leq O(f,Z)$. Es folgt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung Z von Q mit Feinheit $< \delta$ und jede Wahl von $\xi_P \in P$, $P \in \mathcal{Q}(Z)$, gilt:

$$|S - R(f,(\xi_P)_{P\in\mathcal{Q}(Z)})| < \varepsilon$$

Insbesondere ist f Riemann-integrierbar. □

Korollar 3.7. *[Riemannsches Integrabilitätskriterium] Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von Q existiert, so dass $O(f,Z)-U(f,Z) < \varepsilon$ gilt.*

Korollar 3.8. *Jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Satz 3.9 (Satz von Fubini)**.** *Sei Q_x ein abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^p$ und Q_y ein abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^q$. Dann ist $Q = Q_x \times Q_y$ ein abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^{p+q}$. Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und existiert*

$$g(y) = \int_{Q_x} f(x,y)dx$$

für jedes feste $y \in Q_y$, so ist g auf Q_y Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q f(x,y)d(x,y) = \int_{Q_y} \left(\int_{Q_x} f(x,y)dx \right) dy.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Korollar 3.2 existiert eine Zerlegung Z von Q mit $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$. Die Zerlegung Z hat die Form $Z_x \times Z_y$, wobei Z_x und Z_y Zerlegungen von Q_x beziehungsweise Q_y sind.

Sei nun $P \in \mathcal{Q}(Z_y)$. P ist von der Form $[s_1,t_1] \times \cdots \times [s_q,t_q]$ für gewisse reelle Zahlen $s_1,t_1,\ldots,s_q,t_q$. $Z_x \times \{s_1,t_1\} \times \cdots \times \{s_q,t_q\}$ ist eine Zerlegung von $Q_x \times P$. Für ein festes $y \in P$ und $x \in Q_x$ sei $h_y(x) = f(x,y)$. Für jedes $y \in P$ ist $g(y) \leq O(h_y,Z_x)$. Daher gilt

$$V(P) \cdot \sup\{y \in P : g(y)\} \leq O(f, Z_x \times P).$$

Summation über alle $P \in \mathcal{Q}(Z_y)$ liefert

$$O(g,Z_y) \leq O(f, Z_x \times Z_y).$$

Analog erhält man

$$U(f, Z_x \times Z_y) \leq U(g, Z_y).$$

Also gilt

$$O(g, Z_y) - U(g, Z_y) < \varepsilon.$$

Damit ist g Riemann-integrierbar.

Außerdem folgt

$$\int_{Q_y} g(y)dy = \int_Q f(x,y)d(x,y).$$

□

Korollar 3.10. *Seien $Q_x \subseteq \mathbb{R}^p$ und $Q_y \subseteq \mathbb{R}^q$ Quader. Weiter sei $f : Q_x \times Q_y \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Existiert $\int_{Q_x} f(x,y)dx$ für jedes $y \in Q_y$ und existiert $\int_{Q_y} f(x,y)dy$ für jedes $x \in Q_x$, so gilt*

$$\int_{Q_y} \left(\int_{Q_x} f(x,y)dx \right) dy = \int_{Q_x} \left(\int_{Q_y} f(x,y)dy \right) dx.$$

Von nun an lassen wir die Klammern bei Mehrfachintegralen weg.

Korollar 3.11. *Sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Angenommen, alle im Folgenden auftretenden Integrale existieren. Dann gilt*

$$\int_Q f(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n.$$

3.2. **Inhalt und Jordan-Messbarkeit.**

Definition 3.12. Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **Jordan-messbar**, wenn ihre charakteristische Funktion χ_A auf einem abgeschlossenen Quader integrierbar ist, der A umfasst. Dabei ist für $x \in \mathbb{R}^n$ der Funktionswert $\chi_A(x)$ definiert als 1, falls $x \in A$ gilt, und sonst als 0. Ist A Jordan-messbar, so ist der **Inhalt** $|A|$ von A definiert als das Integral von χ_A über einen abgeschlossenen Quader, der A umfasst. Man beachte, dass $|A|$ nicht von der Wahl des Quaders abhängt.

Satz 3.13. *Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand eine Nullmenge ist.*

Beweis. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, der A umfasst. Die Funktion χ_A nach Satz 3.6 genau dann über Q integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. Die Menge der Unstetigkeitsstellen von χ_A ist aber genau der Rand von A. □

Definition 3.14. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), \text{ falls } x \in A, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f ist **Riemann-integrierbar**, wenn die Funktion f_A auf einem abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, der A umfasst, integrierbar ist. In diesem Falle setzt man

$$\int_A f(x)dx = \int_Q f_A(x)dx.$$

Satz 3.15. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Weiter seien $c \in \mathbb{R}$, $m = \inf\{f(x) : x \in A\}$ und $M = \sup\{f(x) : x \in A\}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Die Funktionen fg und $f + g$ sind auf A Riemann-integrierbar und es gilt*
$$\int_A (f+g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx.$$
(2) *Die Funktion cf ist auf A Riemann-integrierbar und es gilt*
$$\int_A cf dx = c \int_A f(x)dx.$$
(3) *Die Funktion $|f|$ ist Riemann-integrierbar und es gilt*
$$\left| \int_A f(x)dx \right| \leq \int_A |f(x)|dx.$$
(4) *Gilt für ein $\alpha > 0$ und alle $x \in A$ die Ungleichung $g(x) \geq \alpha$, so ist f/g Riemann-integrierbar.*
(5) *Es gilt*
$$m|A| \leq \int_A f(x)dx \leq M|A|.$$

Satz 3.16. *a) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$.*

b) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *Jordan-messbar und ist* f *Riemann-integrierbar auf* A *und* B*, so ist* f *Riemann-integrierbar auf* $A \cup B$*,* $A \cap B$ *und* $A \setminus B$ *und es gilt*

$$\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx - \int_{A\cap B} f(x)dx.$$

Insbesondere gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$*.*

Definition 3.17. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Jordansche Nullmenge**, falls A Jordan-messbar ist und den Inhalt 0 hat.

Lemma 3.18. *Eine Menge* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann eine Jordansche Nullmenge, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine endliche Überdeckung aus Quadern existiert, deren Gesamtvolumen kleiner als* ε *ist.*

Beispiel 3.19. Eine kompakte Menge ist genau dann eine Nullmenge, wenn sie eine Jordansche Nullmenge ist.

Satz 3.20. *a) Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Jordansche Nullmenge und* $f : A \to \mathbb{R}$ *beschränkt. Dann ist* $\int_A f(x)dx = 0$*.*

b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *Jordan-messbar mit* $|A \cap B| = 0$*. Dann ist eine Funktion* $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ *genau dann Riemann-integrierbar, wenn* f *auf* A *und auf* B *Riemann-integrierbar ist und es gilt*

$$\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx.$$

Insbesondere gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$*.*

Satz 3.21. *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *Jordan-messbar und* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar, so dass für alle* $x \in A$ *gilt:* $g(x) \le f(x)$*. Dann ist die Menge*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in A \wedge g(x) \le y \le f(x)\}$$

Jordan-messbar und es gilt

$$|G| = \int_A (f - g)(x)dx.$$

Beweis. Die Jordan-Messbarkeit von G folgt aus der Tatsache, dass der Rand von G eine Nullmenge ist. Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, der A umfasst, und $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in A$ gilt: $a \le g(x) \le f(x) \le b$.

Es sei $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von A und $\chi_G : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ die von G. Nach dem Satz von Fubini ist

$$|G| = \int_{Q\times[a,b]} \chi_G(x,y)d(x,y) = \int_Q \int_{[a,b]} \chi_G(x,y)dydx$$

$$= \int_Q \int_{f(x)}^{g(x)} \chi_A(x)dydx = \int_A \chi_A(x)\cdot(f-g)(x)dx = \int_A (f-g)(x)dx.$$

□

3.3. **Die Transformationsformel für Integrale.** Die Transformationsformel ist eine Verallgemeinerung der Integration durch Substitution (Kettenregel) auf höhere Dimensionen.

Wir betrachten zunächst eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Die Ableitung von Φ ist die Abbildung Φ selbst. Damit ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Jakobi-Matrix $D\Phi(x)$ einfach die zu Φ gehörige Matrix M Sei $A = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$. Dann ist $\Phi[A]$ der von den Spalten der Matrix M aufgespannte Spat mit dem n-dimensionalen Volumen $|\det(M)|$. Für jeden Quader $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das Volumen von $\Phi[P]$ genau $|P| \cdot |\det(M)|$.

Eine Grenzwertbetrachtung mit Hilfe von Ober- und Untersummen zeigt, dass für jede kompakte, Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede stetige Funktion $f : \Phi[A] \to \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_{\Phi[A]} f(x)dx = \int_A f(\Phi(t)) \cdot |\det(M)|dt$$

gilt.

Diese Gleichung lässt sich auf Parametertransformationen verallgemeinern, die nicht linear sind.

Satz 3.22 (Transformationsformel)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und*

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^n$$

injektiv und stetig differenzierbar, so dass die Determinante

$$\det(D\Phi(x))$$

entweder auf ganz U positiv oder auf ganz U negativ ist. Ist $A \subseteq U$ kompakt und Jordan-messbar und $f : \Phi[A] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $\Phi[A]$ Jordan-messbar, f Riemann-integrierbar auf $\Phi[A]$ und

$$\int_{\Phi[A]} f(x)dx = \int_A f(\Phi(t)) \cdot |\det(D\Phi(t))|dt.$$

Wir wenden uns zunächst der Jordan-Messbarkeit von $\Phi[A]$ zu.

Definition 3.23. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^p$ und $f : A \to \mathbb{R}^q$. Die Funktion f ist **Lipschitz-stetig mit Konstante** K, falls für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$ Folgendes gilt:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq K.$$

Lemma 3.24. *Sei $p \leq q$, $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}^q$ Lipschitz-stetig. Ist $N \subseteq U$ eine kompakte Jordansche Nullmenge, so ist auch $\Phi[N]$ eine Jordansche Nullmenge.*

Lemma 3.25. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq U$ gilt. Dann ist Φ auf $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq U$ Lipschitz-stetig.*

Lemma 3.26. *Sei $p \leq q$, $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Ist $N \subseteq U$ eine kompakte Jordansche Nullmenge, so auch $\Phi[N]$.*

Im Folgenden benötigen wir noch zwei Sätze über differenzierbare Funktionen.

Satz 3.27 (Umkehrsatz, Satz über die inverse Funktion)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. In einem Punkt $\xi \in G$ sei $Df(\xi)$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von ξ und ein $\varepsilon > 0$, so dass f die Umgebung W bijektiv auf $V = B(f(\xi), \varepsilon)$ abbildet. Die Umkehrung $g : V \to W$ der auf W eingeschränkten Funktion f ist stetig differenzierbar und es gilt*

$$Dg(f(\xi)) = (Df(\xi))^{-1}.$$

Satz 3.28. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Für jedes $x \in U$ sei $Df(x)$ invertierbar. Dann ist für jede offene Menge $W \subseteq U$ auch die Menge $f[W]$ offen.*

Lemma 3.29. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so dass die Matrix $D\Phi(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Ist $A \subseteq U$ kompakt und Jordan-messbar, so ist auch $\Phi[A]$ kompakt und Jordan-messbar.*

Beweisskizze für Satz 3.22. Aus Lemma 3.29 folgt, dass $\Phi[A]$ Jordan-messbar ist, falls A kompakt und Jordan-messbar ist.

Für die eigentliche Transformationsformel betrachten wir zunächst den Fall, dass Φ linear ist. Dann ist $D\Phi(x)$ für alle x dieselbe Matrix M.

Sei Q ein kompakter Quader mit $\Phi[A] \subseteq Q$, sei $g : Q \to \mathbb{R}$ die Fortsetzung von f, die auf $Q \setminus \Phi[A]$ konstant 0 ist, und sei $\varepsilon > 0$. Da f integrierbar ist, existiert $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung Z von Q mit Feinheit $< \delta$ gilt:

$$O(g, Z) - U(g, Z) < \varepsilon.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass alle Funktionswerte von f zwischen $-N$ und N liegen, und sei Q' ein kompakter Quader, der A umfasst. Weiter sei h die Fortsetzung von $f \circ \Phi$ auf Q', die außerhalb von A verschwindet. Wähle nun $\delta' > 0$ so klein, dass für jede Zerlegung Z' von Q' mit Feinheit $< \delta'$ die Summe der Inhalte der $P \in \mathcal{Q}(Z')$, für die $\Phi[P]$ den Rand eines Quaders in $\mathcal{Q}(Z)$ schneidet, höchstens $\frac{\varepsilon}{2N \cdot |\det(M)|}$ ist.

Nun gilt

$$O(h \cdot |\det(M)|, Z') = \sum_{P \in \mathcal{Q}(Z')} \sup\{f(y) : y \in \Phi[P]\} \cdot |\Phi[P]|$$

$$\leq \left(\sum_{P \in \mathcal{Q}(Z)} \sup\{f(y) : y \in P\} \cdot |P| \right) + N \cdot |\det(M)| \cdot \frac{\varepsilon}{2N \cdot |\det(M)|}$$

$$= O(g, Z) + \frac{\varepsilon}{2}$$

und analog

$$U(h \cdot |\det(M)|, Z') \geq U(g, Z) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist

$$O(h \cdot |\det(M)|, Z') - U(h \cdot |\det(M)|, Z') < 2\varepsilon.$$

Also folgt aus der Integrierbarkeit von f die Integrierbarkeit von $f \circ \Phi$ und es gilt

$$\int_A f(\Phi(t)) \cdot |\det(M)| dt = \int_{\Phi[A]} f(x) dx.$$

Der allgemeinen Fall der Transformationsformel ergibt sich nun aus der Tatsache, dass eine Parametertransformation Φ sich an einer Stelle x durch die Abbildung $\xi \mapsto \Phi(x) + D\Phi(x)(\xi - x)$ approximieren lässt. Insbesondere ist für einen kleinen Quader P, der x enthält, der Inhalt von $\Phi(P)$ ungefähr $|\det(D\Phi(x))| \cdot |P|$. $\square$

Beispiel 3.30. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : [0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2; (r,\alpha) \to (r\cos\alpha, r\sin\alpha).$$

Es gilt

$$D\Phi(\alpha,r) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\det(D\Phi(\alpha,r)) = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r.$$

Sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius R. Der Inhalt des Kreises ist $\int_K 1d(x,y)$. Es gilt $K = \Phi[[0,2\pi] \times [0,R]]$. Wir wollen die Transformationsformel benutzen, um das Integral zu berechnen. Leider ist Φ nicht injektiv auf $[0,2\pi] \times [0,R]$. Allerdings sind die Menge $([0,2\pi] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,R])$ der problematischen Punkte und ihr Bild unter Φ Jordansche Nullmengen.

Es zeigt sich, dass sich die Transformationsformel trotzdem anwenden lässt. Es gilt

$$\begin{aligned} |K| = \int_K 1d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R |\det(D\Phi(\alpha,r))| dr d\alpha \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\alpha = \pi R^2 \end{aligned}$$

4. Integration auf Mannigfaltigheiten

4.1. Mannigfaltigkeiten.

Definition 4.1. Sei $k \leq n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **Immersion**, falls die Matrix $D\varphi(x)$ für alle $x \in U$ den Rang k hat.

Eine **k-dimensionale Untermannigfaltigkeit** von $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$, eine offene Teilmenge V von M mit $x \in V$ und eine Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, die U homöomorph auf V abbildet.

Ein Homöomorphismus ist dabei eine stetige Bijektion, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Man beachte, dass die Menge M selbst ein metrischer Raum ist. Die offenen Teilmengen von M sind genau die Mengen der Form $M \cap O$, wobei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

Eine Immersion, die eine offene Teilmenge U von $\mathbb{R}^k$ homöomorph auf ein offene Teilmenge $M \cap V$ von M abbildet, heißt **Karte** von M. Eine Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ von Karten heißt **Atlas** von M, falls M die Vereinigung der Bilder der φ_i, $i \in I$, ist.

Ein Diffeomorphismus ist eine stetig differenzierbare Bijektion, deren Umkehrabbildung stetig differenzierbar ist.

Lemma 4.2 (Kartenwechsel)**.** *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und seien $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ zwei Karten von M. Weiter seien $W_1 = \varphi_1^{-1}[V_1 \cap V_2]$ und $W_2 = \varphi_2^{-1}[V_1 \cap V_2]$. Dann ist $\tau = \varphi_2^{-1} \circ (\varphi_1 \restriction W_1)$ ein Diffeomorphismus von W_1 nach W_2.*

4.2. **Gramsche Determinante und Integration.** Im Folgenden sei M immer eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, unter geeigneten Voraussetzungen das Integral einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ zu definieren. Ist $\varphi : U \to V$ eine Karte von M und verschwindet f außerhalb von $M \setminus V$, so enthält die Abbildung $f \circ \varphi$ bereits alle Informationen, die wir über f haben müssen. Wir wissen, wann und wie wir $f \circ \varphi$ integrieren können, aber leider hängt das Integral $\int_U (f \circ \varphi)(x)dx$ von der Karte φ ab. Das Integral von f über M sollte jedoch unabhängig von den gewählten Karten sein. Auch sollten Integrale über offene Teilmengen von $\mathbb{R}^k$, die sich als k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ auffassen lassen, mit den bisher definierten Integralen zusammenfallen.

Definition 4.3. Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte von M und seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die Komponentenfunktionen von φ. Für $i, j \in \{1, \dots, k\}$ und $x \in U$ sei

$$g_{ij}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_j},$$

also

$$(g_{ij}(x))_{i,j \in \{1,\dots,k\}} = (D\varphi(x))^T \cdot D\varphi(x).$$

Die Abbildung $g : U \to \mathbb{R}; x \mapsto \det((g_{ij}(x))_{1 \le i,j \le k})$ ist die **Gramsche Determinante** von M bezüglich der Karte φ.

Bemerkung 4.4. Es lässt sich zeigen, dass

$$g(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\det((D_i \varphi_j(x))_{1 \le i,j \le k}))^2$$

gilt. Damit ist die Gramsche Determinante immer positiv.

Definition 4.5. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ eine beschränkte offene Menge, $\varphi : U \to V$ eine Karte von M und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die außerhalb von $M \setminus V$ verschwindet. Weiter sei g die Gramsche Determinante bezüglich φ. Dann heißt f **integrierbar** über M, falls die Funktion

$$x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{g(x)}$$

über U integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_M f dS = \int_U f(\varphi(x))\sqrt{g(x)}dx.$$

Dabei benutzen wir dS um anzudeuten, dass über eine verallgemeinerte Fläche (englisch **surface**) integriert wird.

Damit diese Definition sinnvoll ist, sollte $\int_M f dS$ nicht von der Wahl der Karte φ abhängen.

Lemma 4.6. *Seien $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ beschränkt und offen, $\varphi : U \to V$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ Karten von M, g und $\tilde{g}$ die zugehörigen Gramschen Determinanten und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die außerhalb von $V \cap \tilde{V}$ verschwindet. Dann ist die Funktion*

$$h : U \to \mathbb{R}; x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{g(x)}$$

genau dann integrierbar, wenn

$$\tilde{h} : \tilde{U} \to \mathbb{R}; \xi \mapsto f(\tilde{\varphi}(\xi))\sqrt{\tilde{g}(\xi)}$$

integrierbar ist und es gilt

$$\int_U h(x)dx = \int_{\tilde{U}} \tilde{h}(\xi)d\xi.$$

Beweis. Wir setzen $W = \varphi^{-1}[V \cap \tilde{V}]$ und $\tilde{W} = \tilde{\varphi}^{-1}[V \cap \tilde{V}]$. Nach Lemma 4.2 existiert ein Diffeomorphismus $\tau : \tilde{W} \to W$ mit $\tilde{\varphi} \upharpoonright \tilde{W} = \varphi \circ \tau$. Mit Hilfe der Kettenregel kann man $\tilde{g}$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\xi) &= \det((D\tilde{\varphi}(\xi))^T \cdot D\tilde{\varphi}(\xi) \\
&= \det((D\varphi(\tau(\xi)) \cdot D\tau(\xi))^T \cdot D\varphi(\tau(\xi)) \cdot D\tau(\xi)) \\
&= \det((D\tau(\xi))^T \cdot (D\varphi(\tau(\xi))^T \cdot D\varphi(\tau(\xi)) \cdot D\tau(\xi)) \\
&= \det((D\tau(\xi))^T) \cdot \det((D\varphi(\tau(\xi))^T \cdot D\varphi(\tau(\xi))) \cdot \det(D\tau(\xi)) \\
&= (\det(D\tau(\xi)))^2 \cdot g(\tau(\xi))
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\sqrt{\tilde{g}(\xi)} = |\det(D\tau(\xi))| \cdot \sqrt{g(\tau(\xi))}.$$

Nach der Transformationsformel für Integrale gilt

$$\begin{aligned}\int_U h(x)dx &= \int_W f(\varphi(x)) \cdot \sqrt{g(x)}dx \\ &= \int_{\tilde{W}} f(\varphi(\tau(\xi))) \cdot |\det(D\tau(\xi))| \cdot \sqrt{g(\tau(\xi))}d\xi \\ &= \int_{\tilde{W}} f(\tilde{\varphi}(\xi)) \cdot \sqrt{\tilde{g}(\xi)}d\xi = \int_{\tilde{U}} \tilde{h}(\xi)d\xi\end{aligned}$$

Das zeigt die Unabhängigkeit unserer Definition des Integrals $\int_M f dS$ von der Wahl der Karte. □

Wir verallgemeinern nun Definition 4.5 auf mehrere Karten.

Definition 4.7. Sei $(\varphi_j : U_j \to V_j)_{j\in\{1,\dots,m\}}$ ein Atlas von M, wobei die U_j beschränkt sind. Wähle Funktionen $\alpha_j : M \to [0,1]$, $j = 1,\dots,m$, mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle j verschwindet α_j außerhalb von V_j.
(2) Für alle $x \in M$ ist $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1$.
(3) Für alle j ist $\alpha_j \circ \varphi_j$ auf U_j integrierbar.

Die Familie $(\alpha_j)_{1\le j\le m}$ ist eine integrierbare **Partition der Eins**, die der Überdeckung $\{V_j : 1 \le j \le m\}$ **subordiniert** ist. Zum Beispiel können wir α_j als die charakteristische Funktion der Menge

$$W_j = V_j \setminus \left(\bigcup_{i<j} V_i\right)$$

wählen.

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist über M integrierbar, falls für alle $j \in \{1,\dots,m\}$ die Funktion, die $x \in V_j$ auf $f(x)$ und alle $x \in M \setminus V_j$ auf 0 abbildet, auf M integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_M f dS = \sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j f dS.$$

Lemma 4.8. *Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind die Integrierbarkeit von f auf M und der Wert des Integrals $\int_M f dS$ unabhängig von der Wahl des Atlasses, bezüglich dessen das Integral definiert wurde.*

Beweis. Seien $(\varphi_j)_{j\in\{1,\dots,k\}}$ und $(\tilde{\varphi}_l)_{l\in\{1,\dots,m\}}$ zwei Atlanten von M und $(V_j)_{j\in\{1,\dots,k\}}$ und $(\tilde{V}_l)_{l\in\{1,\dots,m\}}$ die zugehörigen offenen Überdeckungen von M. Weiter seien $(\alpha_j)_{j\in\{1,\dots,k\}}$ und $(\tilde{\alpha}l)_{l\in\{1,\dots,k\}}$ diesen Überdeckungen subordinierte Partitionen der Eins. Es gilt $\sum_{l=1}^m \alpha_j\tilde{\alpha}_l = \alpha_j$ und $\sum_{j=1}^k \alpha_j\tilde{\alpha}_l = \tilde{\alpha}_l$. Es folgt

$$\sum_{l=1}^m \int_M \alpha_j\tilde{\alpha}_l f dS = \int_M \alpha_j f dS$$

und

$$\sum_{j=1}^k \int_M \alpha_j\tilde{\alpha}_l f dS = \int_M \tilde{\alpha}_l f dS.$$

Damit gilt

$$\sum_{j=1}^k \int_M \alpha_j f dS = \sum_{l=1}^m \int_M \alpha_l f dS.$$

Das zeigt die Unabhängigkeit des Integrals von der Wahl des Atlasses. □

Beispiel 4.9. Wir berechnen die Oberfläche der Einheitssphäre

$$S^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Für $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $\beta \in (0, 2\pi)$ sei

$$\varphi(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha).$$

Setze $U = (-\pi/2,\pi/2)\times(0,2\pi)$. $\varphi : U \to S^1$ ist eine Karte von S^1. Die Punkte von S^1, die nicht von φ getroffen werden, sind die Elemente der Menge

$$\begin{aligned} A = \{(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha) : \beta = 0 \text{ und } \alpha \in [-\pi/2,\pi/2]\} \\ = \{(\cos\alpha, 0, \sin\alpha) : \alpha \in [-\pi/2,\pi/2]\} \end{aligned}$$

Wir können eine Karte $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ für S^1 mit $A \subseteq \tilde{V}$ wählen. Dann ist $(\varphi, \tilde{\varphi})$ ein Atlas für S^1. Es seien g und $\tilde{g}$ die zu φ und $\tilde{\varphi}$ gehörigen Gramschen Determinanten. Sei $\alpha : S^1 \to [0,1]$ die charakteristische Funktion von $S^1 \setminus A$ und $\tilde{\alpha} : S^1 \to [0,1]$ die von A.

Nach Lemma 4.6 ist

$$\int_{S^1} \tilde{\alpha} dS = \int_{\tilde{U}} \alpha(\tilde{\varphi}(x))\sqrt{\tilde{g}(x)}dx$$

unahängig von der Wahl der Karte $\tilde{\varphi}$, solange nur $A \subseteq \tilde{\varphi}[\tilde{U}]$ gilt. Mit einer geeigneten Wahl von $\tilde{\varphi}$ sieht man, dass $\int_{S^1} \tilde{\alpha} dS = 0$ gilt. Damit erhalten wir

$$\int_{S^1} 1dS = \int_{S^1} \alpha dS = \int_U 1 \cdot \sqrt{g(x)}dx.$$

Es gilt

$$D\varphi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $(g_{ij})_{i,j\in 1,2} = (D\varphi)^T \cdot D\varphi$. Dann ergibt sich

$$g_{11}(\alpha, \beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$g_{12}(\alpha, \beta) = g_{21}(\alpha, \beta) = \sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta = 0$$

und

$$g_{22}(\alpha, \beta) = \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\alpha.$$

Also gilt

$$g(\alpha, \beta) = \det((D\varphi)^T \cdot D\varphi) = \cos^2\alpha.$$

Damit ist

$$\int_{S^1} 1dS = \int_U \cos\alpha dx = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha d\beta = \int_0^{2\pi} 2d\beta = 4\pi.$$

4.3. **Der Satz von Gauss.** Wir formulieren und beweisen nun eine wichtige Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung auf höhere Dimensionen, nämlich den Satz von Gauss. Dazu betrachten wir Mannigfaltigkeiten, die als Rand von kompakten Mengen auftreten.

Definition 4.10. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. A ist ein **Kompaktum mit glattem Rand**, falls es für jeden Randpunkt $x \in \partial A$ von A eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ der Null, eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und eine Immersion $\varphi : U \to V$ mit $\varphi(0) = x$ gibt, die U homoömorph auf V abbildet und $U \cap \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \leq 0\}$ auf $V \cap A$.

Es ist klar, dass der Rand ∂A eines Kompaktums A mit glattem Rand eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Folgende Definition interessiert uns vor allem für Mannigfaltigkeiten, die als Rand auftreten.

Definition 4.11. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist ein **Tangentialvektor von** M **im Punkt** x, falls es $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $f(0) = x$ und $f'(0) = v$ gibt. Der Tangentialraum $T_x(M)$ von M im Punkt x ist der Vektorraum aller Tangentialvektoren von M im Punkt x.

Lemma 4.12. *Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte der k-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $x \in U$. Dann wird $T_{\varphi(x)}(M)$ von den Spalten der Matrix $D\varphi(x)$ erzeugt. Insbesondere ist der Tangentialraum von M im Punkt x k-dimensional.*

Beweis. Sei zunächst $v \in T_x(M)$ und $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $f(0) = x$ und $f'(0) = v$. Wir können annehmen, dass $f[(-\varepsilon, \varepsilon)] \subseteq V$ gilt. Es gilt $f = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ f)$. Nach der Kettenregel ist

$$vf'(0) = D\varphi((\varphi^{-1} \circ f)(0)) \cdot D(\varphi^{-1} \circ f)(0).$$

Damit liegt v in dem Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der von den Spalten der Matrix $D\varphi(x)$ erzeugt wird.

Sei umgekehrt v von der Form $D\varphi(x) \cdot w$ für ein $w \in \mathbb{R}^k$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt: $x + tw \in U$. Setze $f(t) = \varphi(x + tw)$. Nach der Kettenregel ist dann $v = D\varphi(x) \cdot w = f'(0) \in T_{\varphi(x)}(M)$. □

Definition 4.13. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist ein Normalenvektor von M im Punkt x, falls v auf allen $w \in T_x(M)$ senkrecht steht.

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so ist ∂A eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Für jeden Punkt $x \in \partial A$ ist $T_x(\partial A)$ ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Damit ist der Raum der Normalenvektoren von ∂A in jedem Punkt eindimensional.

Satz 4.14. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $x \in \partial A$. Dann existiert genau ein Normalenvektor v von ∂A im Punkt x mit $|v| = 1$, so dass für ein $\varepsilon > 0$ und alle $t \in (0, \varepsilon)$ gilt: $x + tv \notin A$. Der*

Vektor v ist der **äußere Einheitsnormalenvektor** *von A im Punkt x.*

Für den Beweis dieses Satzes benutzen wir folgendes Lemma, dass auch eine Methode liefert, den äußeren Normaleneinheitsvektor zu berechnen.

Lemma 4.15. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $x \in \partial A$. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und eine stetig differenzierbare Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit*

(1) $A \cap V = \{x \in V : f(x) \leq 0\}$,
(2) $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ *für alle* $x \in V$ *und*
(3) $\partial A \cap V = \{x \in V : f(x) = 0\}$.

Man kann zeigen, dass (3) bereits aus (1) und (2) folgt.

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x und $\varphi : U \to V$ eine Immersion, die U homöomorph auf V und $U \cap \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \leq 0\}$ auf $V \cap A$ abbildet. Für $y \in V$ sei $f(y)$ die erste Koordinate von $\varphi^{-1}(y)$. Es ist klar, dass (1) und (3) erfüllt sind. Für (2) beachte, dass nach Satz 3.27 die Ableitung $D\varphi^{-1}(y)$ für alle $y \in V$ vollen Rang hat. Der Gradient $\operatorname{grad} f(y)$ ist einfach die erste Zeile von $D\varphi^{-1}(y)$ und damit von 0 verschieden. □

Beweis von Satz 4.14. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von x und $f : V \to \mathbb{R}$ wie in Lemma 4.15. Der Vektor

$$v = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}$$

leistet das Gewünschte. □

Definition 4.16. Für ein Kompaktum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und $x \in \partial A$ sei $\nu(x)$ der äußere Normaleneinheitsvektor von A im Punkt x.

Satz 4.17 (Satz von Gauss)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $O \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $A \subseteq O$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : O \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_A \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS.$$

Für den Beweis von Satz 4.17 betrachten wir zunächst zwei Spezialfälle.

Lemma 4.18. *Unter den Voraussetzungen des Satzes Gauss sei $Q \subseteq A$ ein offener Quader und verschwinde F außerhalb von Q. Dann gilt der Satz von Gauss für F und A.*

Beweis. Wir können F als Summe von n Vektorfeldern schreiben, die jeweils nur in einer Komponente nicht verschwinden. Es genügt, das Lemma für die einzelnen Summanden zu beweisen. Inhaltlich ist es egal, welche der Komponenten nicht verschwindet. Wir können daher annehmen, dass nur die erste Komponentenfunktion F_1 von F von Null verschieden ist. Wir schreiben Q als $(a, b) \times V$. Nach dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung gilt

$$\begin{aligned}
\int_A \operatorname{div} F(x)dx &= \int_Q \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x)dx \\
&= \int_V \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)dx_1 d(x_2, \ldots, x_n) \\
&= \int_V [F_1(x_1, \ldots, x_n)]_{x_1=a}^{x_1=b} d(x_2, \ldots, x_n) \\
&= \int_V 0 d(x_2, \ldots, x_n) = 0.
\end{aligned}$$

□

Für den zweiten Spezialfall des Satzes von Gauss benötigen wir zunächst eine Methode, die Gramsche Determinante zu berechnen.

Lemma 4.19. *Sei $k \leq n$ und seien A und B zwei $n \times k$-Matrizen. Für $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ sei $A_{i_1,\ldots,i_k}$ die Matrix, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_k$ der Matrix A besteht. Entsprechend definieren wir $B_{i_1,\ldots,i_k}$. Dann gilt*

$$\det(A^T B) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \det(A_{i_1,\ldots,i_k}) \det(B_{i_1,\ldots,i_k}).$$

Lemma 4.20. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (a, b)$ ein Intervall und $h : U \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiter seien*

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U \times I : x_n \leq h(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

und

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U \times I : x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Für $x \in M$ sei $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ der äußere Normaleneinheitsvektor von A im Punkt x. Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U \times I$ verschwindet. Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx = \int_M f(x)\nu_i(x) dS.$$

Beweis. Wir berechnen zunächst $\nu(x)$ für $x \in M$. Beachte, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, die durch die eine Karte

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n; (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

parametrisiert wird. Für $i, j \in \mathbb{N}$ sei $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$ gilt, und $\delta_{ij} = 0$, sonst. Der Tangentialraum von M and der Stelle x wird aufgespannt Spalten der Matrix $D\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$, also von den Vektoren $(\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}, D_i h(x_1, \dots, x_{n-1}))$. Wie man leicht sieht, steht der Vektor

$$v = (-D_1 h(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, -D_{n-1} h(x_1, \dots, x_{n-1}), 1)$$

senkrecht auf den Erzeugern des Tangentialraums und ist damit ein Normalenvektor von M im Punkt x. Da die letzte Komponente von v positiv ist, zeigt v nach außen. Es gilt

$$|v| = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} h(x_1, \dots, x_{n-1})|^2}.$$

Damit gilt für alle $i < n$

$$\nu_i(x) = \frac{-D_i h(x_1, \dots, x_{n-1})}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} g(x_1, \dots, x_{n-1})|^2}}$$

und

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} h(x_1, \dots, x_{n-1})|^2}}.$$

Wir berechnen nun die Gramsche Determinante g von φ and einer Stelle $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei A^i die Matrix, die entsteht, wenn man die i-te Zeile der Matrix von $D\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ weglässt. Nach Lemma 4.19 ist

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} (\det A^i)^2.$$

Es gilt $\det A^n = 1$ und für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ist

$$|\det A^i| = |D_i h(x_1, \dots, x_{n-1})|.$$

Damit ist

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1 + |\operatorname{grad} h(x_1, \dots, x_{n-1})|^2.$$

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir untersuchen zunächst den Fall $i = n$. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx &= \int_U \int_a^{h(x_1,\dots,x_{n-1})} \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n d(x_1, \dots, x_{n-1}) \\
&= \int_U (f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, a)) dx_1 \dots dx_{n-1} \\
&= \int_U f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) dx_1 \dots dx_{n-1} \\
&= \int_U (f \cdot \nu_n)(\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) \sqrt{g(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_1 \dots dx_{n-1} \\
&= \int_M (f \cdot \nu_n) dS
\end{aligned}$$

Nun sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Definiere $F : U \times I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, z) = \int_a^z f(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

Es gilt

$$\frac{\partial F(x_1, \dots, x_{n-1}, z)}{\partial z} = f(x_1, \dots, x_{n-1}, z)$$

und

$$\frac{\partial F(x_1, \dots, x_{n-1}, z)}{\partial x_i} = \int_a^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{h(x_1,\dots,x_{n-1})} & f(x_1, \dots, x_n) dx_n \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) \\
&= \int_a^{h(x_1,\dots,x_{n-1})} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_n \\
&\quad + f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) \frac{\partial h(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Da f außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U \times I$ verschwindet, verschwindet die Funktion

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \int_a^{h(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n$$

außerhalb einer kompakten Teilmenge von U. Es folgt

$$\int_U \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_a^{h(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_n)dx_n\right)dx_1\dots dx_{n-1}=0.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx &= \int_U\left(\int_a^{h(x_1,\dots,x_{n-1})}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)dx_n\right)dx_1\dots dx_{n-1}\\ &= \int_U \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_a^{h(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_n)dx_n\right)dx_1\dots dx_{n-1}\\ &- \int_U f(x_1,\dots,x_{n-1},g(x_1,\dots,x_{n-1}))\frac{\partial g(x_1,\dots,x_{n-1})}{\partial x_i}dx_1\dots dx_{n-1}\\ &= \int_M f(x)\nu_i(x)dS\end{aligned}$$

□

Korollar 4.21. *Sei $U\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I=(a,b)$ ein Intervall und $h: U\to I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiter seien*

$$A=\{(x_1,\dots,x_n)\in U\times I : x_n\le h(x_1,\dots,x_{n-1})\}$$

und

$$M=\{(x_1,\dots,x_n)\in U\times I : x_n= h(x_1,\dots,x_{n-1})\}.$$

Für $x\in M$ sei $\nu(x)=(\nu_1(x),\dots,\nu_n(x))$ der äußere Normaleneinheitsvektor von A im Punkt x. Weiter sei $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das außerhalb einer kompakten Teilmenge von $U\times I$ verschwindet. Dann gilt für alle $i\in\{1,\dots,n\}$

$$\int_A \operatorname{div} F dx=\int_M\langle F,\nu\rangle dS.$$

Lemma 4.22. *Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $\mathcal{O}$ eine Familie offener Mengen mit $A\subseteq\bigcup\mathcal{O}$. Dann existiert eine endliche Familie $\mathcal{F}$ stetig differenzierbarer Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $[0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für alle $f\in\mathcal{F}$ existiert $U\in\mathcal{O}$, so dass f außerhalb von U verschwindet.*
(2) *Für alle $x\in A$ ist $\sum_{f\in\mathcal{F}} f(x)=1$.*

$\mathcal{F}$ ist eine der Überdeckung $\mathcal{O}$ subordinierte, stetig differenzierbare Partition der Eins auf A.

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & \text{falls } |t| < 1, \text{ und} \\ 0, & \text{falls } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Setze

$$G(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k).$$

Dann ist G auf ganz $\mathbb{R}$ von 0 verschieden und für alle $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt $G(t) = G(t-k)$. Setze nun

$$h(t) = \frac{g(t)}{G(t)}.$$

Dann ist h beliebig oft differenzierbar, verschwindet außerhalb von $[-1, 1]$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t-k) = 1.$$

Für $\varepsilon > 0$ und $n > 0$ sei $\mathcal{F}(\varepsilon, n)$ die Familie aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass für alle $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} h((t_i - k_i)/\varepsilon)$$

Beachte, dass jede Funktion $f \in \mathcal{F}(\varepsilon, n)$ außerhalb eines Würfels der Form $\prod_{i=1}^{n}(k_i - \varepsilon, k_i + \varepsilon)$ verschwindet.

Da A kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in A$ folgendes gilt: Falls $f \in \mathcal{F}(\varepsilon, n)$ auf x nicht verschwindet und $U \in \mathcal{O}$ eine Umgebung von x ist, so verschwindet f außerhalb von U.

Sei nun $\mathcal{F}$ die Familie der Funktionen $f \in \mathcal{F}(\varepsilon, n)$, die nicht auf ganz A verschwinden. Diese Familie von Funktionen leistet das Gewünschte. □

Lemma 4.23. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $x \in \partial A$. Dann existieren $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein offener Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass ∂A auf Q der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion*

$$h : (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

ist. Mit anderen Worten, wenn Q_i die Projektion von Q auf die von der i-ten Koordinate verschiedenen Koordinaten ist, so ist

$$\partial A \cap Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in Q_i \\ \wedge\, x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\}.$$

Beweis von Satz 4.17. Für jedes $x \in A$ sei $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offener Quader, der entweder ganz im Innern von A liegt oder dessen Abschluss in einem offenen Quader enthalten ist, auf dem ∂A der Graph einer Funktion wie in Lemma 4.23 ist. Dann ist $\mathcal{O} = \{U_x : x \in A\}$ eine offene Überdeckung von A. $\mathcal{F}$ sei eine endliche, $\mathcal{O}$ subordinierte, stetig differenzierbare Partition der Eins auf A. Die zwei bisher bewiesenen Spezialfälle des Gaussschen Satzes zeigen, dass der Satz für die Vektorfelder $f \cdot F$, $f \in \mathcal{F}$ gilt. Auf A gilt $F = \sum_{f \in \mathcal{F}} f \cdot F$. Daraus folgt der Satz für F. □

4.4. **Der Satz von Stokes.** Im Satz von Gauss tritt ein sogenanntes Flussintegral auf, das heißt ein Integral der Form

$$\int_M \langle F, \nu \rangle dS,$$

wobei M eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und ν ein Normaleneinheitsvektorfeld von M ist. Das Flussintegral misst den Fluss des Vektorfeldes F durch die "Fläche" M in Richtung des Normalenfelds ν.

Für eindimensionale Untermannigfaltigkeiten lässt sich auf ähnliche Weise ein Arbeitsintegral definieren. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit nirgends verschwindender Ableitung. Für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieren wir das Arbeitsintegral von F entlang des Weges f als

$$\int_{f[(a,b)]} \langle F, \tau \rangle ds = \int_a^b \langle F(f(x)), f'(x) \rangle dx,$$

wobei τ das Einheitstangentialvektorfeld der Kurve $f[(a, b)]$ in der Durchlaufrichtung von f bezeichnet. Wir schreiben ds anstelle von dS, um das Integral über eine Kurve von dem Integral über eine Fläche zu unterscheiden. Das Arbeitsintegral misst die Arbeit, die verrichtet wird, wenn man sich entlang des Weges f durch das Vektorfeld F bewegt.

Definition 4.24. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Ist $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ injektiv, zweimal stetig differenzierbar und haben alle Jacobimatrizen von Φ den Rang 2, so heißt Φ eine **Stokesfläche**. Der Einfachheit halber werden wir auch $\Phi[D]$ eine Stokesfläche nennen. Die $\Phi[D]$ berandende Kurve $\partial\Phi[D]$ ist die Menge $\Phi[\partial D]$.

Der Satz von Stokes besagt, dass das Flussintegral der Rotation eines Vektorfeldes über eine Stokesfläche gleich dem Arbeitsintegral des Vektorfeldes über die die Stokesfläche berandende Kurve ist. Hierbei sind gewisse Orientierungen zu berücksichtigen.

Satz 4.25 (Satz von Stokes)**.** *Sei $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ eine Stokesfläche und $F : \Phi[D] \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_{\partial\Phi[D]} \langle F, \tau\rangle ds = \int_{\Phi[D]} \langle \operatorname{rot} F, \nu\rangle dS.$$

Dabei zeigen die Normalenvektoren $\nu(\omega)$ in Richtung des Daumens der rechten Hand, wenn ∂D in Richtung der Finger der rechten Faust durchlaufen wird.

Beweis. Wir führen den Satz von Stokes auf den Satz von Gauss in der Ebene zurück. Sei zunächst F ein Vektorfeld, bei dem alle bis auf eine Komponente verschwinden. Wir nehmen an, dass die ersten beiden Komponenten verschwinden. Der Fälle, dass die erste und letzte beziehungsweise die beiden letzten Komponenten, lassen sich vollkommen analog behandeln.

Um die Notation etwas kompakter zu gestalten, schreiben wir im Folgenden Φ_{1x} für $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}$, Φ_{3y} für $\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}$ und so weiter. Dabei steht (x, y) immer für einen Punkt aus D. Entsprechend schreiben wir F_{31} für $\frac{\partial F_3}{\partial x_1}$ und so weiter. Dabei steht (x_1, x_2, x_3) immer für einen Punkt in $\Phi[D]$. Für $x, y \in D$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\operatorname{rot} F)(\Phi(x,y)), \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)(x,y)\right\rangle \\
&\qquad = \langle (F_{32}, -F_{31}, 0)\,(\Phi(x,y)), \\
&\qquad (\Phi_{2x}\cdot\Phi_{3y} - \Phi_{2y}\cdot\Phi_{3x}, \Phi_{3x}\cdot\Phi_{1y} - \Phi_{3y}\cdot\Phi_{1x}, *)\,(x,y)\rangle \\
&\qquad = F_{32}(\Phi_{2x}\Phi_{3y} - \Phi_{2y}\Phi_{3x}) - F_{31}(\Phi_{3x}\Phi_{1y} - \Phi_{3y}\Phi_{1x}) \\
&\qquad = (F_{31}\Phi_{1y} + F_{32}\Phi_{2y})\cdot(\Phi_{3y} - \Phi_{3x}).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\left((F_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3y},-(F_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3x}\right)\\ &=\frac{\partial(F_3\circ\Phi)}{\partial x}\cdot\Phi_{3y}+(F_3\circ\Phi)\cdot\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y\partial x}-\frac{\partial(F_3\circ\Phi)}{\partial y}\cdot\Phi_{3x}-(F_3\circ\Phi)\cdot\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial y}\\ &=\frac{\partial(F_3\circ\Phi)}{\partial x}\cdot\Phi_{3y}-\frac{\partial(F_3\circ\Phi)}{\partial y}\cdot\Phi_{3x}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial(F_3\circ\Phi)}{\partial x}=\left\langle\operatorname{grad}F_3,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\rangle=F_{31}\Phi_{1x}+F_{32}\Phi_{2x}+F_{33}\Phi_{3x}$$

und

$$\frac{\partial(F_3\circ\Phi)}{\partial y}=F_{31}\Phi_{1y}+F_{32}\Phi_{2y}+F_{33}\Phi_{3y}$$

folgt

$$\operatorname{div}\left((F_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3y},-(F_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3x}\right)=(F_{31}\Phi_{1x}+F_{32}\Phi_{2x})\cdot(\Phi_{3y}-\Phi_{3x}).$$

Mit anderen Worten: Das Flussintegral der Rotation von F über $\Phi[D]$ ist gleich dem Flächenintegral der Divergenz des Vektorfeldes

$$G:D\to\mathbb{R}^2;(x,y)\mapsto(F_3(\Phi(x,y))\cdot\Phi_{3y}(x,y),-F_3(\Phi(x,y))\cdot\Phi_{3x}(x,y))$$

über D, also

$$\int_{\Phi[D]}\langle\operatorname{rot}F,\nu\rangle dS=\int_D\operatorname{div}Gdx.$$

Sei nun $\mathbf{n}:\partial D\to\mathbb{R}^2$ das äußere Normaleneinheitsvektorfeld von D. Für $x\in\partial D$ steht der Einheitstangentialvektor $\mathbf{t}(x)$ von ∂D senkrecht auf $\mathbf{n}(x)$. Wird ∂D entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen, so ist $\mathbf{n}(x)=(\mathbf{t}_2(x),-\mathbf{t}_1(x))$. Das Flussintegral von G über ∂D ist dann

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\langle G,\mathbf{n}\rangle ds&=\int_{\partial D}\langle G,(\mathbf{t}_2,-\mathbf{t}_1)\rangle ds\\ &=\int_{\partial D}\left((F_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3y}\cdot\mathbf{t}_2+(F_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3x}\cdot\mathbf{t}_1\right)ds\\ &=\int_{\partial D}(F_3\circ\Phi)\cdot\langle\operatorname{grad}\Phi_3,\mathbf{t}\rangle ds\end{aligned}$$

Sei nun $\varphi:(a,b)\to\partial D$ eine Karte von ∂D, wobei die Durchlaufrichtung wieder entgegen dem Uhrzeigersinn ist. Wir nehmen zunächst an, dass F außerhalb von $\varphi[(a,b)]$ verschwindet. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}&(F_3\circ\Phi)\cdot\langle\operatorname{grad}\Phi_3,\mathbf{t}\rangle ds\\ &=\int_a^b F_3(\Phi(\varphi(t)))\cdot\langle\operatorname{grad}\Phi_3(\varphi(t)),\mathbf{t}(\varphi(t))\rangle\cdot|\varphi'(t)|dt\\ &=\int_a^b F_3(\Phi(\varphi(t)))\cdot\langle\operatorname{grad}\Phi_3(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle dt\\ &=\int_a^b F_3(\Phi(\varphi(t)))\cdot(\Phi_3\circ\varphi)'(t)dt=\int_{\Phi[\partial D]}\langle F,\tau\rangle ds\end{aligned}$$

Indem man F mit Hilfe einer differenzierbaren Partition der Eins zerlegt, lässt sich für alle F, bei denen erste und zweite Komponente verschwinden, die Gleichung

$$\int_{\partial D}\langle G,\mathbf{n}\rangle ds=\int_{\Phi[\partial D]}\langle F,\tau\rangle ds$$

beweisen.

Nach dem Satz von Gauß in der Ebene ist

$$\int_{\partial D}\langle G,\mathbf{n}\rangle ds=\int_D\operatorname{div}G dx.$$

Es folgt der Satz von Stokes für $\Phi[D]$ und F.

Dieselben Argumente zeigen den Satz für Vektorfelder, bei denen die erste und dritte beziehungsweise die zweite und dritte Komponente verschwinden. Der allgemeine Fall ergibt sich wieder durch Zerlegung eines gegebenen Vektorfeldes in drei Vektorfelder, bei denen jeweils zwei Komponenten verschwinden. □

5. Hilberträume

Definition 5.1. Sei V ein Vektorraum über $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{K}$ heißt **inneres Produkt**, falls für alle $\lambda\in\mathbb{K}$ und alle $v,v',w\in\mathbb{V}$ gilt:

(1) $\langle v,v\rangle\geq 0$, wobei $\langle v,v\rangle=0$ genau dann gilt, wenn $v=0$ ist.
(2) $\langle v,w\rangle=\overline{\langle w,v\rangle}$
(3) $\langle v+v',w\rangle=\langle v,w\rangle+\langle v',w\rangle$
(4) $\langle\lambda v,w\rangle=\lambda\langle v,w\rangle$

Dabei bezeichnet $\overline{\lambda}$ die zu λ konjugierte komplexe Zahl.

Beachte, dass im reellen Fall für alle $\lambda \in K$ die Gleichung $\overline{\lambda} = \lambda$ gilt. Aus (2) folgt schon, dass $\langle v, v\rangle$ für alle $v \in V$ reell ist. Aus (2)–(4) folgt, dass für alle $\lambda \in K$ und alle $v, w, w' \in V$ gilt:

$$\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle \text{ und } \langle v, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$$

Satz 5.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Ist V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so gilt für alle $u, v \in V$ die Ungleichung*

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||,$$

wobei $||u||$ für $\sqrt{\langle u, u\rangle}$ steht.

Satz 5.3. *Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein inneres Produkt auf dem K-Vektorraum V, so definiert $||v|| = \sqrt{|\langle v, v\rangle|}$ eine Norm auf V.*

Definition 5.4. Ein K-Vektorraum V mit einem inneren Produkt heißt **Prähilbertraum**. Ist V ein Prähilbertraum, der bezüglich der von dem inneren Produkt induzierten Norm vollständig ist, so heißt V **Hilbertraum**.

Beispiel 5.5. a) Auf $\mathbb{C}^n$ definiert

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = x_1\overline{y}_1 + \dots + x_n\overline{y}_n$$

ein inneres Produkt. Die Einschränkung auf $\mathbb{R}^n$ ist ein inneres Produkt des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^n$.

b) ℓ^2 sei der Vektorraum der reell- beziehungsweise komplexwerigen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty.$$

Die Vorschrift

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y}_n$$

definiert ein inneres Produkt, das ℓ^2 zu einem Hilbertraum macht.

Für die nächste wichtige Klasse von Beispielen stellen wir zunächst fest, dass sich auch Funktionen, die auf unbeschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert sind, unter Umständen sinnvoll integrieren lassen.

Definition 5.6. Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, wobei $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ auch erlaubt sind. Weiter sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine

Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall von (a,b) Riemann-integrierbar ist.

Sei $c \in (a,b)$. Dann ist f auf (a,b) **uneigentlich integrierbar**, falls die Grenzwerte

$$A = \lim_{y \searrow a} \int_y^c f(x)dx$$

und

$$B = \lim_{y \nearrow a} \int_c^y f(x)dx$$

existieren. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(a,b)} f(x)dx = A + B.$$

Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge, für die wir die Integrierbarkeit von Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ definiert haben, so ist eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ **integrierbar**, falls sowohl der Realteil $\mathrm{Re}(f)$ als auch der Imaginärteil $\mathrm{Im}(f)$ integrierbar ist. Wir setzen dann

$$\int_M f dx = \int_M \mathrm{Re}\, f dx + i \cdot \int_M \mathrm{Im}\, f dx.$$

Definition 5.7. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt oder $M = (a,b)$, wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ erlaubt sind. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist **quadratintegrierbar**, wenn die Funktion $x \mapsto |f(x)|^2$ auf M integrierbar ist.

Lemma 5.8. *Seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ quadratintegrierbar. Dann ist die Funktion $f\overline{g} : M \to \mathbb{C}$ integrierbar. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert durch*

$$\langle f, g \rangle = \int_M f\overline{g} dx$$

erfüllt (2)–(4) in Definition 5.1 sowie $\langle f, f \rangle \geq 0$. Definieren wir wieder $||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, so erhalten wir eine **Halbnorm***, die alle Axiome für eine Norm erfüllt, außer, dass aus $||f|| = 0$ nicht unbedingt $f = 0$ folgt.*

Satz 5.9 (Parallelogrammgleichung)**.** *Ein normierter Vektorraum V ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn für alle $x, y \in V$ die Parallelogrammgleichung*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

gilt.

Satz 5.10. *a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann existieren ein vollständiger metrischer Raum Y und eine abstandstreue (***isometrische***) Einbettung $e : X \to Y$. Der Abschluss von $e[X]$ in Y heißt die Vervollständigung von X.*

b) Sei V ein Prähilbertraum. Dann ist die Vervollständigung von V ein Hilbertraum.

Beispiel 5.11. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und M wie in Definition 5.7. Sei V der K-Vektorraum der quadratintegrierbaren Funktionen von M nach K und sei V_0 der Unterraum der Funktionen $f \in V$ mit $\langle f, f \rangle = 0$. Der Raum V/V_0 ist K-Vektorraum mit einem inneren Produkt, das von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert wird. Die Vervollständigung $L^2(M)$ von V/V_0 ist dann ein Hilbertraum.

Legt man anstelle des Riemann-Integrals das Lebesguesche Integral zugrunde, so sind mehr Funktionen quadratintegrierbar und der Quotient, der V/V_0 entspricht, ist bereits ein vollständiger metrischer Raum.

Alternativ kann man auch die stetigen quadratintegrierbaren Funktionen auf der Menge M betrachten. Falls M gutartig ist, also zum Beispiel ein Quader oder ein Intervall, so bilden die quadratintegriebaren Funktion auf M bereits einen Prähilbertraum, da für jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_M |f|^2 dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$$

Die Vervollständigung dieses Prähilbertraums ist dann der Hilbertraum $L^2(M)$.