# MATHEMATISCHE LOGIK UND MENGENLEHRE

STEFAN GESCHKE

## 1. Einleitung

Das wichtigste Konzept der Mathematik, welches sie von allen anderen Wissenschaften unterscheidet, ist das des Beweises. Aus gewissen grundlegenden Annahmen, den Axiomen, werden weitere Aussagen abgeleitet, und zwar mit Hilfe von Beweisen. Bereits vor über zweitausend Jahren hat Euklid von Alexandria mathematische Sätze auf diese Weise aus Axiomen hergeleitet. Natürlich wurden Beweise bis ins 19. Jahrhundert eher informell geführt.

Es lässt sich jedoch ganz konkret formalisieren, was ein Beweis ist. Die Untersuchung formaler Beweise ist der Gegenstand der mathematischen Logik. Zunächst befassen wir uns dazu mit Wahrheitswerten von Aussagen und logischen Verknüpfungen wie "und ", "oder" und "nicht". Dieser Teil der mathematischen Logik heißt Aussagenlogik.

Wir definieren dann Sprachen, mit denen wir mathematische Aussagen überhaupt aufschreiben können (Syntax). Es gibt dann zum Beispiel die Sprache der Gruppentheorie, die Sprache der Körpertheorie und so weiter. Dann definieren wir, was die Ausdrücke in diesen Sprachen bedeuten (Semantik). Schließlich führen wir einen Kalkül ein, in dem wir Beweise durch rein syntaktische Manipulation führen können. Dieser Teil der mathematischen Logik ist die Prädikatenlogik. Ihre wichtigsten Ergebnisse sind erstens, dass formale Beweise korrekt sind, dass wir also aus einem Axiomensystem nur Sätze formal ableiten können, die auch wirklich inhaltlich folgen, und zweitens, dass der prädikatenlogische Kalkül vollständig ist, das heißt, dass wir alle Sätze, die inhaltlich aus den Axiomen folgen, auch wirklich formal ableiten können. Das erste Ergebnis ist der sogenannte Korrektheitssatz, das zweite der Vollständigkeitssatz.

Das erklärt, wie man zum Beispiel aus den Axiomen der Gruppentheorie weitere Aussagen über Gruppen ableiten kann. Aber welche Axiome und welche Sprache benutzt man um zu zeigen, dass die reellen Zahlen die bekannten Eigenschaften haben, nachdem man sie als die Menge der Dedekindschen Schnitte der rationalen Zahlen konstruiert hat? Es stellt sich heraus, dass sich die gesamte Mathematik in der Sprache der Mengenlehre aufschreiben lässt. Alle betrachteten Objekte sind Mengen und das zu Grunde liegende Axiomensystem ist die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre zusammen mit dem Auswahlaxiom (ZFC). Ein wahrer mathematischer Satz ist ein Satz, der aus ZFC formal ableitbar ist. Natürlich führen Mathematiker normaler Weise keine formalen Beweise in ZFC. Aber überraschender Weise lassen sich informelle Beweise, die als korrekt angesehen werden, praktisch immer formal in ZFC führen. Das liegt daran, dass die Axiome so gewählt sind, das selbst Mathematiker, die keine mengentheoretische Erfahrung haben, sich intuitiv innerhalb dieses mengentheoretischen Rahmens bewegen.

Aber warum ist es nötig, überhaupt diesen formalen Aufwand zu betreiben? Zum einen brauchen wir eine Methode, zu überprüfen, ob Beweise korrekt sind. Bei einem Beweis, der in natürlicher Sprache aufgeschrieben ist, ist das nicht immer

---

Dieses Skript basiert auf meinen Skripten "Einführung in die Logik und Modelltheorie" aus dem Sommersemester 2010 und "Einführung in die Mengenlehre" aus dem Wintersemester 2010/11.

einfach. Bei einem formalen Beweis muss jedoch nur in jedem Beweisschritt untersucht werden, ob der Beweisschritt gemäß dem Kalkül erfolgt. Das lässt sich zum Beispiel leicht mit einem Computer überprüfen.

Außerdem können wir mit einem formalen Beweisbegriff auch untersuchen, was die Grenzen der Mathematik sind, welche Aussagen wir zum Beispiel nicht beweisen oder widerlegen können. Ein Beispiel ist die Kontinuumshypothese (CH), die besagt, dass jede Teilmenge der reellen Zahlen entweder abzählbar ist oder gleichmächtig mit der Menge aller reellen Zahlen. Nachdem man sich auf ein Axiomensystem für die Mengenlehre geeinigt hatte, konnten Gödel und Cohen beweisen, dass weder die Kontinuumshypothese noch ihre Negation aus den Axiomen folgt.

Die wichtigste Motivation für die Entwicklung der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre war die folgende Russellsche Antinomie, ein Widerspruch in der von Georg Cantor erfundenen Mengenlehre, der 1903 von Bertand Russell gefunden wurde. Cantor hat eine Menge als "eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Gegenständen unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen"] definiert. Es kann aber nicht jede solche "Zusammenfassung zu einem Ganzen" eine Menge sein. Betrachtet man nämlich das Objekt

$$R = \{x : x \text{ ist eine Menge mit } x \notin x\},$$

so gilt entweder $R \in R$ oder $R \notin R$.

Im ersten Fall gilt $R \notin R$ nach Definition von $R$, ein Widerspruch zu $R \in R$. Im zweiten Fall gilt $R \in R$ nach Definition von $R$, ein Widerspruch zu $R \notin R$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Cantorsche Mengendefinition zu naiv ist.

Die ZFC-Axiome besagen, dass gewisse Gesamtheiten Mengen sind und wie man aus Mengen weitere Mengen kontruieren können. Das oben definierte konstruierte Objekt $R$ ist keine Menge im Sinne der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre. Das führt dazu, dass wir über $R$ in der Sprache der Mengenlehre eigentlich nicht reden können. Insbesondere ist die Bedeutung der Ausdrücke $R \in R$ oder $R \notin R$ gar nicht definiert. Damit umschifft die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre die Russellsche Antinomie.

## 2. Aussagenlogik

Eine Aussage ist bekanntlich ein sprachlicher Ausdruck, von dem sich im Prinzip feststellen lässt, ob er wahr oder falsch ist. Die Aussagenlogik befasst sich mit der Frage, wann gewisse Verknüpfungen (mittels "und", "oder" etc.) von Aussagen wahr sind. Dabei interessiert man sich nicht für den Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen, sondern nur dafür, ob diese wahr oder falsch sind.

2.1. **Alphabete und Wörter.** Ein *Alphabet* (die Zeichen- bzw. Symbolmenge) ist zunächst eine beliebige Menge $Z$. Dabei ist $Z = \emptyset$ erlaubt. Auch endliche, unendliche und überabzählbare Alphabete sind erlaubt. In vielen Fällen werden wir abzählbar unendliche Alphabete betrachten.

Es sei
$$Z^* := \{(z_1, \dots, z_n) : n \in \mathbb{N}, z_1, \dots, z_n \in Z\}$$
die Menge aller endlichen Folgen über $Z$. Dabei ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Die Elemente von $Z^*$ heißen *Wörter* über $Z$. Anstelle von $(z_1, \dots, z_n)$ schreiben wir $z_1 \dots z_n$. Die natürliche Zahl $\mathrm{le}(w)$ ist die *Länge* $n$ des Wortes $w = z_1 \dots z_n$. Man beachte, dass $Z^*$ auch die Folge der Länge 0 enthält. Diese Folge ist das *leere Wort* und wird mit $\lambda$ bezeichnet.

Zwei Wörter $v = s_1 \dots s_m$ und $w = t_1 \dots t_n$ sind genau dann gleich, wenn $m = \mathrm{le}(v) = n = \mathrm{le}(w)$ ist und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $s_i = t_i$.

Auf $Z^*$ definieren wir die zweistellige Operation $\frown$ der *Verkettung*: für $v = s_1 \dots s_m$ und $w = t_1 \dots t_n$ sei
$$v^\frown w := s_1 \dots s_m t_1 \dots t_n.$$
Anstelle von $v^\frown w$ schreiben wir üblicherweise kurz $vw$. Die Operation
$$\frown : Z^* \times Z^* \to Z^*$$
ist assoziativ; $\lambda$ ist das neutrale Element bzgl. $\frown$.

Jedes Zeichen $z \in Z$ identifizieren wir im Allgemeinen mit dem Wort $(z)$ der Länge 1. Damit ist $Z \subseteq Z^*$.

**Beispiel 2.1.** *Sei $Z := \{(, ), \wedge, \vee, p, q, r\}$. Dann sind folgende Wörter über $Z$ paarweise verschieden:*
$$p \wedge (q \wedge r), \quad (p \wedge q) \wedge r, \quad p \wedge q \wedge r, \quad (p \wedge q) \vee r, \quad p \wedge q \vee r, \quad )pp\vee)r$$

Man beachte, dass es Wörter über $Z$ gibt, die uns sinnvoll erscheinen, Wörter, die uns unsinnig erscheinen, und Wörter, die missverständlich aussehen. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

2.2. **Formeln und eindeutige Lesbarkeit.** Wir definieren aussagenlogische Formeln als spezielle Zeichenreihen, die für Verknüpfungen von Aussagen stehen. In diesem Abschnitt geht es nur um die grammatisch-formalen (syntaktischen) Eigenschaften von Formeln, nicht um ihre inhaltliche Bedeutung (Semantik).

**Definition 2.2.** Es sei $P$ eine unendliche Menge, die Menge der *Aussagenvariablen*, und $J := \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ die Menge der *Junktoren*, d.h., der aussagenlogischen Verknüpfungen. Wir nehmen dabei an, dass $P$ und $J$ disjunkt sind. Das *Alphabet der Aussagenlogik* ist $Z := P \cup J$.

**Definition 2.3.** Die Menge Fml der (aussagenlogischen) *Formeln* (über $P$ und $J$) ist die kleinste Menge $M \subseteq Z^*$ mit

(1) $P \subseteq M$
(2) $\alpha \in M \Rightarrow \neg\alpha \in M$
(3) $j \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$, $\alpha, \beta \in M \Rightarrow j\alpha\beta \in M$

Genauer:

$$\mathrm{Fml} := \bigcap\{M \subseteq Z^* : M \text{ erfüllt (1)-(3)}\}$$

Die Elemente von $P$ heißen *atomare* Formeln.

**Bemerkung 2.4.** Man sieht leicht, dass Fml selbst die Eigenschaften (1)-(3) aus Definition 2.3 hat.

Die hier gewählte Definition der Formeln ist vielleicht etwas überraschend. Die übliche Schreibweise für $j\alpha\beta$ ist $(\alpha j \beta)$ bzw. $\alpha j \beta$. Unsere Schreibweise ist die sogenannte *Polnische Notation* (PN, auch *Präfix-Schreibweise*), die gegenüber der üblichen Schreibweise (der *Infix-Schreibweise*) technische Vorteile hat und ohne Klammern auskommt. Es gibt auch noch die *umgekehrte Polnische Notation* (UPN, auch *Postfix-Schreibweise*), in der man $\alpha\beta j$ anstelle von $j\alpha\beta$ schreibt.

In diesem Abschnitt benutzen wir die PN, weil sich gewisse Sätze so leichter beweisen lassen. Später benutzen wir dann die übliche (und für menschliche Wesen leichter lesbare) Infix-Schreibweise.

**Beispiel 2.5.** *Wir schreiben ein paar Formeln in Infix-Schreibweise, PN und UPN auf:*

| *Infix-Schreibweise* | *PN* | *UPN* |
|---|---|---|
| $\neg p \vee q$ | $\vee\neg pq$ | $p\neg q\vee$ |
| $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ | $\to \wedge pq \vee rs$ | $pq \wedge rs\vee \to$ |
| $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to \delta$ | $\to\to\to \alpha\beta\gamma\delta$ | $\alpha\beta \to \gamma \to \delta \to$ |

Die Menge der aussagenlogischen Formeln in Infix-Schreibweise kann man wie folgt definieren:

Zunächst sei $K := \{(,)\}$ die Menge der Klammern. $P$ und $J$ seien wie in Definition 2.3. Setze $Z_{\text{Infix}} := P \cup J \cup K$. Die Menge $\mathrm{Fml}_{\text{Infix}}$ der aussagenlogischen Formeln in Infix-Schreibweise sei die kleinste Menge $M \subseteq Z_{\text{Infix}}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $P \subseteq M$
(2) $\alpha \in M \Rightarrow \neg\alpha \in M$
(3) $\alpha, \beta \in M$ und $j \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\} \Rightarrow (\alpha j \beta) \in M$

Als nächstes beschreiben wir einen Algorithmus, mit dem für ein Wort $w \in Z^*$ schnell erkennt, ob $w$ ein Element von Fml ist.

**Definition 2.6.** Wir definieren eine *Gewichtsfunktion* $\gamma : Z \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen) durch

$$\gamma(z) := \begin{cases} -1, \text{ falls } z \in P \\ 0, \text{ falls } z = \neg \\ 1, \text{ falls } z \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\} \end{cases}$$

Für $w = z_1 \dots z_n \in Z^*$ definieren wir die *Quersumme* von $w$ als

$$\mathrm{qs}(w) := \sum_{i=1}^{n} \gamma(z_i) = \gamma(z_1) + \dots + \gamma(z_n).$$

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir leicht das *Quersummenkriterium* für Formeln formulieren.

**Satz 2.7.** *Sei* $w = z_1 \dots z_n \in Z^*$. *Dann gilt* $w \in \mathrm{Fml}$ *genau dann, wenn* $\mathrm{qs}(w) = -1$ *ist und für jedes echte Anfangsstück* $v = z_1 \dots z_m$, $m < n$, *von* $w$ *gilt:* $\mathrm{qs}(v) \geq 0$.

*Beweis.* Für $v, w \in Z^*$ schreiben wir $v \sqsubset w$, falls $v$ ein echtes Anfangsstück von $w$ ist. Setze

$$M := \{w \in Z^* : \mathrm{qs}(w) = -1 \text{ und } \mathrm{qs}(v) \geq 0 \text{ für alle } v \sqsubset w\}.$$

Wir zeigen $M = \mathrm{Fml}$.

Für $\mathrm{Fml} \subseteq M$ genügt es nach Definition von Fml zu zeigen, dass $M$ die Eigenschaften (1)–(3) aus Definition 2.3 hat.

$P \subseteq M$ ist klar. Sei $\alpha \in M$. Wegen $\gamma(\neg) = 0$ gilt dann auch $\neg\alpha \in M$. Seien nun $\alpha, \beta \in M$ und $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Wegen $\alpha, \beta \in M$ gilt

$$\mathrm{qs}(j\alpha\beta) = 1 + \mathrm{qs}(\alpha) + \mathrm{qs}(\beta) = 1 - 1 - 1 = -1.$$

Sei nun $v \sqsubset j\alpha\beta$. Ist $v = \lambda$, so gilt $\mathrm{qs}(v) = 0$. Ist $v = j$, so gilt $\mathrm{qs}(v) = 1$. Ist $v = ju$ für ein $u \in Z^*$ mit $u \sqsubset \alpha$ oder $u = \alpha$, so gilt $\mathrm{qs}(v) = 1 + \mathrm{qs}(u) \geq 0$, da $\mathrm{qs}(u) \geq -1$ wegen $\alpha \in M$. Sonst ist $v = j\alpha u$ für ein $u \sqsubset \beta$. Es gilt dann

$$\mathrm{qs}(v) = 1 + \mathrm{qs}(\alpha) + \mathrm{qs}(u) = 1 - 1 + \mathrm{qs}(u) = \mathrm{qs}(u) \geq 0$$

wegen $\alpha, \beta \in M$.

Das zeigt $\mathrm{Fml} \subseteq M$. Als nächstes zeigen wir $M \subseteq \mathrm{Fml}$. Dabei benutzen wir wiederholt die Tatsache, dass Fml selbst die Eigenschaften (1)-(3) aus Definition 2.3 hat.

Für jedes $w = z_1 \dots z_n \in M$ zeigen wir $w \in \mathrm{Fml}$, und zwar durch vollständige Induktion über $n$. Im Falle $n = 1$ ist $\mathrm{qs}(w) = \gamma(z_1) = -1$ wegen $w \in M$. Also gilt $z_1 \in P$ und damit $w = z_1 \in \mathrm{Fml}$.

Sei $n > 1$. Wegen $w \in M$ ist $\gamma(z_1) \geq 0$, also $z_1 \in J$. Sei $j = z_1$. Dann existiert $v \in Z^*$ mit $jv = w$.

Angenommen $j = \neg$. Aus $\gamma(\neg) = 0$ und $w = \neg v \in M$ folgt $v \in M$. Nach Induktionsannahme gilt $v \in \mathrm{Fml}$. Damit gilt auch $w \in \mathrm{Fml}$.

Angenommen $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann ist $\gamma(j) = 1$. Wegen $\mathrm{qs}(w) = -1$, $\gamma(j) = 1$ und $\gamma(z) \in \{-1, 0, 1\}$ für alle $z \in Z$ gibt es ein $\alpha \sqsubset v$ mit $\mathrm{qs}(j\alpha) = 0$. Wähle ein $\alpha$ mit dieser Eigenschaft von minimaler Länge. Dann ist $\mathrm{qs}(\alpha) = -1$ und wegen der minimalen Länge von $\alpha$ haben alle echten Anfangsstücke von $\alpha$ eine Quersumme $\geq 0$. Es gilt also $\alpha \in M$. Nach Induktionsannahme ist also $\alpha \in \mathrm{Fml}$.

Sei nun $\beta \in Z^*$ so gewählt, dass $v = \alpha\beta$ gilt. Dann ist $\mathrm{qs}(\beta) = -1$. Ist $u \sqsubset \beta$, so ist $j\alpha u \sqsubset w$ und damit $0 \leq \mathrm{qs}(j\alpha u) = 1 - 1 + \mathrm{qs}(u) = \mathrm{qs}(u)$. Es folgt $\beta \in M$ und damit $\beta \in \mathrm{Fml}$ nach Induktionsannahme. Damit gilt auch $w = j\alpha\beta \in \mathrm{Fml}$. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun leicht die eindeutige Lesbarkeit von Formeln nachweisen.

**Satz 2.8.** *Sei $\alpha \in \mathrm{Fml}$. Dann hat $\alpha$ genau eine der folgenden Formen:*

(1) $\alpha = p \in P$ *(mit eindeutig bestimmtem $p \in P$)*
(2) $\alpha = \neg\beta$ *(mit eindeutig bestimmtem $\beta \in \mathrm{Fml}$)*
(3) $\alpha = j\beta\gamma$ *(mit eindeutig bestimmtem $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und eindeutig bestimmten $\beta, \gamma \in \mathrm{Fml}$)*

*Beweis.* Man sieht leicht, dass $\alpha$ eine der angegebenen Formen hat. Nichttrivial ist nur Eindeutigkeit in (3). Sei $\alpha = j\beta\gamma = j\beta'\gamma'$ mit $\beta, \gamma, \beta', \gamma' \in \mathrm{Fml}$. Angenommen $\beta \neq \beta'$. Dann ist $\beta$ echtes Anfangsstück von $\beta'$ oder umgekehrt. Nach Satz 2.7 ist aber kein echtes Anfangstück einer Formel wieder eine Formel. Ein Widerspruch. Also ist $\beta = \beta'$ und damit auch $\gamma = \gamma'$. □

Im Beweis von Satz 2.7 haben wir implizit ein Beweisverfahren angewandt, das auf der gewöhnlichen vollständigen Induktion basiert und welches man *Induktion über den Formelaufbau* nennt. Dieses Verfahren wird in folgendem abstrakten Lemma beschrieben.

**Lemma 2.9.** *Sei $E$ eine Eigenschaft von Wörtern (aus $Z^*$) und es gelte*

(1) *alle $p \in P$ haben die Eigenschaft $E$;*
(2) *hat $w$ die Eigenschaft $E$, so auch $\neg w$;*

(3) *haben $v$ und $w$ die Eigenschaft $E$ und ist $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so hat auch $jvw$ die Eigenschaft $E$.*

*Dann haben alle Elemente von* Fml *die Eigenschaft $E$.*

*Beweis.* Wir identifizieren $E$ mit der Menge der $w \in Z^*$, die die Eigenschaft $E$ haben. Es ist also $\mathrm{Fml} \subseteq E$ zu zeigen. Aber aus (1)–(3) folgt sofort, dass $M := E$ die Aussagen (1)–(3) aus Definition 2.3 erfüllt. Nach der Definition von Fml ist damit $\mathrm{Fml} \subseteq E$. □

Wegen Satz 2.8 lassen sich auch Funktionen auf Fml induktiv über den Formelaufbau definieren. Ein wichtiges Beispiel ist die Menge der Teilformeln einer Formel.

**Definition 2.10.** Für jedes $\alpha \in \mathrm{Fml}$ definieren wir die Menge $\mathrm{tf}(\alpha)$ der *Teilformeln* von $\alpha$ wie folgt:

$$\mathrm{tf}(\alpha) = \begin{cases} \{\alpha\}, \text{ falls } \alpha \in P \\ \{\alpha\} \cup \mathrm{tf}(\beta), \text{ falls } \alpha = \neg\beta \\ \{\alpha\} \cup \mathrm{tf}(\beta) \cup \mathrm{tf}(\gamma), \text{ falls } \alpha = j\beta\gamma \text{ mit } j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ und } \beta, \gamma \in \mathrm{Fml} \end{cases}$$

Für $\alpha \in \mathrm{Fml}_{\mathrm{Infix}}$ definiert man die Teilformeln analog:

$$\mathrm{tf}_{\mathrm{Infix}}(\alpha) := \begin{cases} \{\alpha\}, \text{ falls } \alpha \in P \\ \{\alpha\} \cup \mathrm{tf}_{\mathrm{Infix}}(\beta), \text{ falls } \alpha = \neg\beta \\ \{\alpha\} \cup \mathrm{tf}_{\mathrm{Infix}}(\beta) \cup \mathrm{tf}_{\mathrm{Infix}}(\gamma), \text{ falls } \alpha = (\beta j \gamma) \\ \qquad \text{mit } j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ und } \beta, \gamma \in \mathrm{Fml} \end{cases}$$

Man beachte, dass man für diese Definition einen Satz über die eindeutige Lesbarkeit von Infix-Formeln braucht.

2.3. **Wahrheitswerte von Formeln.** Dieser Abschnitt ist der *Semantik* von aussagenlogischen Formeln gewidmet, d.h., der Frage, unter welchen Umständen eine Formel wahr bzw. falsch wird. Wir schreiben alle Formeln in Infix-Schreibweise, wobei wir äußere Klammern weglassen, und identifizieren Fml und $\mathrm{Fml}_{\mathrm{Infix}}$ mit Hilfe der naheliegenden Bijektion.

**Definition 2.11.** $2 = \{0, 1\}$ ist die Menge der *Wahrheitswerte*, wobei 1 für „wahr" und 0 für „falsch" steht. Jede Abbildung von $v : P \to 2$ heißt *Belegung* von $P$.

**Definition 2.12.** Wir setzen eine gegebene Belegung $v : P \to 2$ zu einer Abbildung $\overline{v} : \mathrm{Fml} \to 2$ fort. Die Definition von $\overline{v}$ erfolgt rekursiv über den Formelaufbau. Für jedes $p \in P$ sei $\overline{v}(p) = v(p)$. Die weiteren Rekursionsschritte entnimmt man folgender Tabelle:

| $\overline{v}(\alpha)$ | $\overline{v}(\beta)$ | $\overline{v}(\neg\alpha)$ | $\overline{v}(\alpha \wedge \beta)$ | $\overline{v}(\alpha \vee \beta)$ | $\overline{v}(\alpha \rightarrow \beta)$ | $\overline{v}(\alpha \leftrightarrow \beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$\overline{v}(\alpha)$ ist der *Wahrheitswert* von $\alpha$ unter $v$. In Zukunft werden wir nicht mehr zwischen $v$ und $\overline{v}$ unterscheiden.

Es ist intuitiv klar, dass der Wahrheitwert einer Formel unter einer Belegung nur von der Belegung der in der Formel tatsächlich vorkommenden Aussagenvariablen abhängt.

**Definition 2.13.** Für $\alpha \in \mathrm{Fml}$ sei $\mathrm{var}(\alpha)$ die Menge der in $\alpha$ vorkommenden Aussagenvariablen. Genauer, für $\alpha = z_1 \dots z_n$ sei

$$\mathrm{var}(\alpha) := \{z_i : 1 \leq i \leq n\} \cap P.$$

**Lemma 2.14** (Koinzidenztheorem)**.** *Sei $\alpha$ Formel. Seien $v, v' : P \to 2$ Belegungen mit $v \restriction \mathrm{var}(\alpha) = v' \restriction \mathrm{var}\,\alpha$. Dann ist $v(\alpha) = v'(\alpha)$.*

*Beweis.* Durch Induktion über den Formelaufbau. □

**Definition 2.15.** Eine Formel $\alpha$ heißt *allgemeingültig* (*Tautologie*), falls für jede Belegung $v$ der Aussagenvariablen $v(\alpha) = 1$ gilt. Ist $\alpha$ Tautologie, so schreibt man $\models \alpha$.

Die Formel $\alpha$ heißt *erfüllbar*, falls es eine Belegung $v : P \to 2$ mit $v(\alpha) = 1$ gibt.

Die Formel $\alpha$ heißt *Kontradiktion*, wenn $\alpha$ nicht erfüllbar ist.

**Bemerkung 2.16.** Das Koinzidenztheorem (Lemma 2.14) liefert einen Algorithmus, um für gegebenes $\alpha$ zu entscheiden, ob $\alpha$ erfüllbar ist.

Man ermittle zunächst die endliche Menge $\mathrm{var}(\alpha)$. Sei etwa $\mathrm{var}(\alpha) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Es gibt dann genau $2^n$ Abbildungen $v_0 : \{p_1, \dots, p_n\} \to 2$. Für jedes $v_0$ berechne man rekursiv $v_0(\alpha)$. Die Formel $\alpha$ ist genau dann erfüllbar, wenn ein $v_0$ die Formel wahr macht.

Üblicherweise nennt man Tabellen, in denen man Belegungen der Variablen und die entsprechenden Wahrheitswerte von Formeln einträgt, wie zum Beispiel die in Definition 2.12, *Wahrheitstafeln*. Deshalb heißt der eben beschriebene Algorithmus auch das *Wahrheitstafelverfahren*.

Man beachte, dass das Wahrheitstafelverfahren langsam ist, da man für eine Formel $\alpha$ mit $n$ Variablen $2^n$ Belegungen $v_0$ ausprobieren muss. Allerdings läßt sich für gegebenes $v_0$ schnell der Wahrheitswert von $\alpha$ unter $v_0$ ausrechnen.

SAT (für *satisfyability*) ist das Problem, für eine gegebene aussagenlogische Formel zu bestimmen, ob die Formel erfüllbar ist oder nicht. Nach dem oben Gesagten ist SAT ein typischer Vertreter der Komplexitätsklasse NP. Es läßt sich sogar zeigen, dass SAT NP-vollständig ist, d.h., grob gesagt, mindestens so schwer wie jedes andere Problem in NP. (Für Näheres zum Thema Komplexitätstheorie siehe [Christos Papadimitriou, Computational Complexity, Addison-Wesley (1994)].)

**Beispiel 2.17.** *Betrachte die Formel*

$$\alpha = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

*Offenbar ist* $\mathrm{var}(\alpha) = \{p, q\}$*. Wir stellen die entsprechende Wahrheitstafel auf. Dabei schreiben wir in die erste Zeile die Variablen und die Formel. Darunter stehen in den ersten beiden Spalten die jeweiligen Belegungen der Variablen. In den weiteren Spalten stehen jeweils unter den Variablen die Belegungen und unter den Junktoren die Wahrheitswerte, die man erhält, wenn man den Wahrheitswert der Formel bis zu dem jeweiligen Junktor ausrechnet.*

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\wedge$ | $q)$ | $\vee$ | $(\neg$ | $p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

*Die Spalte, in der die Wahrheitswerte von $\alpha$ stehen, ist die unter dem $\vee$. Wir sehen, dass $\alpha$ erfüllbar ist, aber keine Tautologie.*

**Beispiel 2.18.** *Für jede Formel $\alpha$ ist $\alpha \vee \neg\alpha$ Tautologie und $\alpha \wedge \neg\alpha$ Kontradiktion. Das berechnet man wie im Beispiel 2.17, wobei man so tut als sei $\alpha$ eine Aussagenvariable, da nur der Wahrheitswert von $\alpha$ interessiert und nicht der genauere Aufbau von $\alpha$.*

*Dass $\alpha \vee \neg\alpha$ Tautologie ist, ist der* Satz vom ausgeschlossenen Dritten *(*tertium non datur*).*

**Beispiel 2.19.** *Wir sammeln noch einige Beispiele für Tautologien. Wieder kann man mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens leicht nachrechnen, dass es sich tatsächlich um Tautologien handelt. Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Fml}$.*

$$
\begin{aligned}
&\alpha \to \alpha, \quad \alpha \leftrightarrow \alpha,\\
&(\alpha \wedge \beta) \to \alpha, \quad (\alpha \wedge \beta) \to \beta, \quad \alpha \to (\alpha \vee \beta), \quad \beta \to (\alpha \vee \beta),\\
&(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta,\\
&((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma) \ (\text{Kettenschluss}),\\
&((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \leftrightarrow (\alpha \to (\beta \to \gamma)),\\
&(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta \ (\text{ex falso quodlibet}, \textit{ aus Falschem folgt Beliebiges}),\\
&\alpha \to (\beta \vee \neg\beta)
\end{aligned}
$$

**Definition und Bemerkung 2.20.** a) Zwei Formeln $\alpha$ und $\beta$ heißen (semantisch) äquivalent, falls $\alpha \leftrightarrow \beta$ Tautologie ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für jede Belegung $v : P \to 2$ gilt: $v(\alpha) = v(\beta)$. Wir schreiben dann $\alpha \approx \beta$. Die Relation $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge Fml.

b) Für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Fml}$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\alpha \approx \alpha \wedge \alpha \approx \alpha \vee \alpha, \quad \neg\neg\alpha \approx \alpha,\\
&\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha,\\
&(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \quad (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma),\\
&\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \approx (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), \quad \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma),\\
&\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta, \quad \neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta,\\
&\alpha \to \beta \approx \neg\beta \to \neg\alpha, \quad \neg(\alpha \to \beta) \approx \alpha \wedge \neg\beta
\end{aligned}
$$

c) Solange uns nur semantische Aspekte interessieren, erlauben wir uns vereinfachende Schreibweisen wie zum Beispiel $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ an Stelle von $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ und $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

### 2.4. **Boolesche Funktionen und disjunktive Normalform.**

**Definition 2.21.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : 2^n \to 2$ heißt *$n$-stellige Boolesche Funktion.* Wir werden den Begriff „Boolesche Funktion“ auch in einem etwas allgemeineren Kontext benutzen:

Sei $P_0$ eine endliche Teilmenge der Menge $P$ der Aussagenvariablen. Dann ist

$$2^{P_0} := \{v : P_0 \to 2\}$$

die Menge der Belegungen auf $P_0$. Wir nennen eine Abbildung $f : 2^{P_0} \to 2$ *Boolesche Funktion* über $P_0$.

Für eine Formel $\alpha$ mit $\mathrm{var}(\alpha) \subseteq P_0$ und $v \in 2^{P_0}$ sei

$$f_\alpha(v) = v(\alpha).$$

Offenbar ist $f_\alpha$ Boolesche Funktion über $P_0$. Man beachte, dass $f_\alpha$ von der Wahl von $P_0$ abhängt. Insofern sollte man für $f_\alpha$ eigentlich $f_\alpha^{P_0}$ schreiben. Die Menge $P_0$ wird sich aber immer aus dem Zusammenhang ergeben.

**Bemerkung 2.22.** Offenbar sind zwei Formeln $\alpha$ und $\beta$ genau dann äquivalent, wenn für $P_0 = \mathrm{var}(\alpha) \cup \mathrm{var}(\beta)$ gilt: $f_\alpha = f_\beta$.

Im nächsten Satz werden wir sehen, dass sich jede Boolesche Funktion in der Form $f_\alpha$ schreiben läßt. Dazu brauchen wir folgende Definition.

**Definition 2.23.** Eine Formel $\alpha$ heißt *in disjunktiver Normalform* (DNF), falls Formeln $\alpha_i$ existieren mit

$$\alpha = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n,$$

so dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ Formeln $\beta_{ij} \in P \cup \{\neg p : p \in P\}$ existieren mit

$$\alpha_i = \beta_{i1} \wedge \cdots \wedge \beta_{ik_i}.$$

**Satz 2.24** (Satz über die disjunktive Normalform)**.** *Sei $P_0 \subseteq P$ endlich und $f$ Boolesche Funktion über $P_0$. Dann existiert eine Formel $\alpha$ in DNF mit* $\operatorname{var}(\alpha) \subseteq P_0$ *und $f = f_\alpha$.*

*Insbesondere existiert zu jeder Formel $\beta$ eine Formel $\alpha$ in DNF mit $\alpha \approx \beta$ und* $\operatorname{var}(\alpha) = \operatorname{var}(\beta)$.

*Beweis.* Sei $P_0 = \{p_1, \ldots, p_r\}$ und

$$\{v \in 2^{P_0} : f(v) = 1\} = \{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Für $p \in P$ setze $p^1 := p$ und $p^0 := \neg p$. Für $v \in 2^{P_0}$ sei

$$\alpha_v := p_1^{v(p_1)} \wedge \cdots \wedge p_r^{v(p_r)}.$$

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\alpha_i := \alpha_{v_i}$. Dann leistet

$$\alpha := \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$$

das Gewünschte. □

**Definition und Bemerkung 2.25.** a) Natürlich lassen sich neben den Junktoren in $J$, auf die wir uns geeinigt haben, auch noch weitere (ein- oder zweistellige) Junktoren betrachten. Es sollte klar sein, wie mit neuen Junktoren sinnvolle Formeln gebildet werden.

Die Bedeutung neuer Junktoren wird über Wahrheitstafeln definiert. Wie im Falle der Junktoren in $J$ lässt sich für jede Belegung $v : P \to 2$ der Wahrheitswert einer Formel, die die neuen Junktoren benutzt, unter der Belegung $v$ definieren.

b) Drei beliebte Beispiele für weitere zweistellige Junktoren sind $|$ (*Sheffer-Strich*), auch `nor` (nicht oder) genannt, $\uparrow$ (*Peirce-Pfeil*), auch `nand` (nicht und) genannt, und `xor` (ausschließendes oder, entweder ... oder ...). Diese drei Junktoren werden durch folgende Wahrheitstafel definiert:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \mid \beta$ | $\alpha \uparrow \beta$ | $\alpha$ `xor` $\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

c) Eine Menge $J'$ von ein- und zweistelligen Junktoren heißt *aussagenlogische Basis*, falls jede Boolesche Funktion über einer endlichen Menge $P_0 \subseteq P$ von einer Formel, die nur die Junktoren in $J'$ benutzt, repräsentiert wird.

**Beispiel 2.26.** *a) Nach Satz 2.24 ist $\{\neg, \vee, \wedge\}$ eine aussagenlogische Basis. Sogar die Menge $\{\neg, \wedge\}$ ist eine aussagenlogische Basis, und zwar wegen*

$$\alpha \vee \beta \approx \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta).$$

*Auch $\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \to\}$ sind aussagenlogische Basen.*

*b) Die Mengen $\{\,|\,\}$ und $\{\uparrow\}$ sind jeweils aussagenlogische Basen, denn*

$$\neg\alpha \approx \alpha \,|\, \alpha \approx \alpha \uparrow \alpha,$$

$$\alpha \wedge \beta \approx (\neg\alpha \,|\, \neg\beta) \approx \neg(\alpha \uparrow \beta)$$

*und $\{\neg, \wedge\}$ ist aussagenlogische Basis.*

*c) Die Menge $\{\wedge, \vee\}$ ist keine aussagenlogische Basis. Ist nämlich $\alpha$ eine Formel, in der nur die Junktoren $\wedge$ und $\vee$ vorkommen, so gilt für die Belegung $v : P \to 2$, die konstant den Wert 1 hat, $v(\alpha) = 1$. Für jedes $p \in P$ ist aber $v(\neg p) = 0$.*

2.5. **Die semantische Folgerungsrelation.**

**Definition 2.27.** Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}$ und $\alpha \in \mathrm{Fml}$. Dann *folgt* $\alpha$ (semantisch) aus $\Phi$, falls jede Belegung, die alle Formeln in $\Phi$ wahr macht, auch $\alpha$ wahr macht. Wir schreiben in diesem Falle $\Phi \models \alpha$.

Im Falle $\Phi = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ schreiben wir auch

$$\beta_1, \dots, \beta_n \models \alpha.$$

Man beachte, dass $\beta \models \alpha$ genau dann gilt, wenn $\beta \to \alpha$ Tautologie ist.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 2.28** (Kompaktheitssatz der Aussagenlogik)**.** *Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}$. Dann folgt $\alpha \in \mathrm{Fml}$ genau dann aus $\Phi$, wenn $\alpha$ bereits aus einer endlichen Teilmenge $\Phi_0$ von $\Phi$ folgt.*

Für den Beweis des Kompaktheitssatzes nehmen wir an, dass die Menge $P$ abzählbar ist. Der Satz gilt zwar auch für überabzählbares $P$, der Beweis ist dann aber etwas verwickelter, wenn man nicht auf den Satz von Tychonov aus der Topologie zurückgreifen will. Ausserdem folgt der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik aus dem Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik, den wir später in voller Allgemeinheit beweisen werden.

**Definition 2.29.** Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}$. $\Phi$ heißt *erfüllbar*, falls eine Belegung existiert, die alle Formeln in $\Phi$ wahr macht.

**Lemma 2.30.** *Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}$ und $\alpha \in \mathrm{Fml}$. Dann gilt $\Phi \not\models \alpha$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ erfüllbar ist.*

*Beweis.* Gelte $\Phi \not\models \alpha$. Dann existiert eine Belegung $v : P \to 2$, die alle Formeln in $\Phi$ wahr macht, aber nicht $\alpha$. Es ist also $v(\neg\alpha) = 1$. Damit macht $v$ alle Formeln in $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ wahr.

Sei umgekehrt $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ erfüllbar. Wähle eine Belegung $v : P \to 2$, die alle Formeln in $\Phi$ und $\neg\alpha$ wahr macht. Insbesondere gilt $v(\alpha) = 0$. Damit gilt $\phi \not\models \alpha$. □

**Lemma 2.31.** *$\Phi \subseteq \mathrm{Fml}$ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar ist.*

*Beweis.* Ist $\Phi$ erfüllbar, so ist offenbar auch jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar.

Wir müssen also nur zeigen, dass $\Phi$ erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar ist. Das ist trivial, wenn $\Phi$ endlich ist. Wir nehmen also an, dass $\Phi$ unendlich ist. Da wir angenommen haben, dass $P$ abzählbar ist, ist Fml und damit auch $\Phi$ abzählbar. Sei also $\Phi = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P_n := \mathrm{var}(\alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_n) = \mathrm{var}(\alpha_0) \cup \dots \cup \mathrm{var}(\alpha_n).$$

Wir können annehmen, dass jede Aussagenvariable in $P$ in mindestens einem Element von $\Phi$ vorkommt, dass also

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = P$$

gilt.

Für jede Formel $\alpha$ sei $[\alpha]$ die Menge der Belegungen $v : P \to 2$, die $\alpha$ wahr machen. Da jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar ist, gilt

$$[\alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_n] \neq \emptyset$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $([\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge nichtleerer Mengen. Für den Beweis des Lemmas müssen wir

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n] \neq \emptyset$$

zeigen.

(Wer topologisch bewandert ist, der sieht, dass es sich bei $([\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n])_{n\in\mathbb{N}}$ um eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Mengen in dem kompakten Raum $2^P$ handelt, wobei $2^P$ mit der von der diskreten Topologie auf 2 induzierten Produkttopologie ausgestattet ist. Wegen der Kompaktheit von $2^P$ (folgt aus dem Satz von Tychonov) ist der Schnitt der $[\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n]$ nicht leer. Dieses Argument geht übrigens für beliebig große Variablenmengen durch.)

Dazu wählen wir eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $v_n : P_n \to 2$;
(2) $v_n \subseteq v_{n+1}$ ($v_{n+1}$ ist Fortsetzung von $v_n$);
(3) jede Fortsetzung von $v_n$ auf ganz $P$ liegt in $[\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n]$, d.h., $v_n$ macht $\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ wahr.

Wir machen uns zunächst klar, warum es genügt, eine solche Folge zu konstruieren. Setze $v := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Da die $v_n$ einander fortsetzen, ist $v$ wohldefiniert. Wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = P$ ist $v$ auf ganz $P$ definiert. Nach Lemma 2.14 macht $v$ alle Formeln in $\Phi$ wahr.

Um in der Konstruktion der $v_n$ nicht steckenzubleiben, sorgen wir dafür, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

($*$) Es gibt unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, für die $v_n$ eine Fortsetzung in $[\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m]$ hat.

Wir setzen $v_{-1} := \emptyset$. Angenommen $v_{n-1}$ ist bereits konstruiert und erfüllt ($*$). Es gibt nur endlich viele Fortsetungen von $v_{n-1}$ auf $P_n$, da $P_n$ endlich ist. Da ($*$) für $v_{n-1}$ gilt, existiert mindestens eine Fortsetzung $v_n$ von $v_{n-1}$, die ($*$) erfüllt.

Es ist klar, dass die so konstruierte Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Gewünschte leistet. □

*Beweis von Satz 2.28.* Angenommen, $\alpha$ folgt aus einer endlichen Teilmenge $\Phi_0$ von $\Phi$. Sei $v$ eine Belegung, die alle Formeln in $\Phi$ wahr macht. Wegen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ macht $v$ auch alle Formeln in $\Phi_0$ wahr. Da $\alpha$ aus $\Phi_0$ folgt, gilt $v(\alpha) = 1$. Das zeigt, dass $\alpha$ aus $\Phi$ folgt.

Angenommen, $\alpha$ folgt aus $\Phi$. Nach Lemma 2.30 ist das genau dann der Fall, wenn $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ nicht erfüllbar ist. Nach Lemma 2.31 existiert eine endliche Menge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\Phi_0 \cup \{\neg\alpha\}$ nicht erfüllbar ist. Eine weitere Anwendung von Lemma 2.30 zeigt, dass $\alpha$ aus $\Phi_0$ folgt. □

2.6. **Anwendung des Kompaktheitssatzes.** In diesem Abschnitt diskutieren wir eine kombinatorische Anwendung des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik.

**Definition 2.32.** Ein *Graph* ist ein Paar $(V, E)$, wobei $V$ eine beliebige Menge ist und $E$ eine Menge von zweielementigen Teilmengen von $V$. $V$ ist die Menge der *Ecken* und $E$ ist die Menge der *Kanten* des Graphen. Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich ohne Überkreuzungen in die Ebene zeichnen läßt.

Wir zitieren den (bisher nur mit Computerhilfe bewiesenen) *Vierfarbensatz*:

**Satz 2.33.** *Für jeden endlichen planaren Graphen $G = (V, E)$ existiert eine Abbildung $c : V \to 4 = \{0, 1, 2, 3\}$, so dass für alle $\{x, y\} \in E$ gilt: $c(x) \neq c(y)$.*

Eine Abbildung $c$, wie sie der Vierfarbensatz garantiert, heißt aus naheliegenden Gründen *Vierfärbung*. Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes folgern wir aus dem Vierfarbensatz für endliche Graphen:

**Korollar 2.34.** *Sei $G = (V, E)$ ein (eventuell unendlicher) planarer Graph. Dann existiert eine Abbildung $c : V \to 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $c(x) \neq c(y)$ für alle $\{x, y\} \in E$.*

*Beweis.* Wir definieren eine Formelmenge $\Phi$, so dass jede Belegung, die $\Phi$ wahr macht eine Abbildung $c$ mit den gewünschten Eigenschaften codiert.

Für jede Ecke $x$ von $G$ gönnen wir uns vier Aussagenvariablen $p_x^0 \dots p_x^3$. Es sei also $P := \{p_x^i : x \in V, i < 4\}$. Weiter sei für alle $x \in V$ die Formel $\alpha_x$ so gewählt, dass $\alpha_x$ dann, und nur dann, wahr ist, wenn genau eine der Variablen $p_x^0, \dots, p_x^3$ wahr ist.

Für jede Kante $e = \{x, y\} \in E$ sei $\beta_e$ eine Formel, die genau dann wahr ist, wenn für alle $i < 4$ die Variablen $p_x^i$ und $p_y^i$ nicht beide gleichzeitig wahr sind. Setze

$$\Phi := \{\alpha_x : x \in V\} \cup \{\beta_e : e \in E\}.$$

Ist nun $v$ eine Belegung, die alle Formeln in $\Phi$ wahr macht, so definieren wir $c : V \to 4$ wie folgt: für jedes $x \in V$ sei $c(x)$ die eindeutig bestimmte Zahl $i < 4$ für die $v(p_x^i) = 1$ ist. Aus der Definition von $\Phi$ folgt unmittelbar, dass $c$ eine Vierfärbung von $G$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi$ erfüllbar ist. Nach Lemma 2.31 genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar ist. Sei also $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich.

Dann existiert eine endliche Menge $V_0 \subseteq V$, so dass für alle $x \in V$ mit $\alpha_x \in \Phi_0$ und für alle $e = \{y, z\} \in E$ mit $\beta_e \in \Phi_0$ gilt: $x, y, z \in V_0$.

Nach dem Vierfarbensatz für endliche Graphen existiert eine Vierfärbung $c_0$ des Graphen $(V_0, E \cap \mathcal{P}(V_0))$. Nun wählen wir eine Belegung $v$, die für alle $x \in V_0$ genau ein $p_x^i$, $i < 4$, wahr macht, nämlich $p_x^{c(x)}$. Es ist klar, dass diese Belegung alle Formeln in $\Phi_0$ wahr macht. $\square$

## 3. Prädikatenlogik

3.1. **Vokabulare und Strukturen.** Die Prädikatenlogik erlaubt es, über beliebige mathematische Strukturen zu sprechen. Das nächste Beispiel zeigt, welche Form von Aussagen dabei möglich sein sollten.

**Beispiel 3.1.** *Betrachte die folgende Aussage $\alpha$ über angeordnete Körper:*

$$\forall a \forall b \forall c (\exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c < 0) \wedge \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c > 0) \\ \rightarrow \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0))$$

*Die Aussage $\alpha$ besagt, dass jedes quadratische Polynom, das sowohl positive als auch negative Werte annimmt, eine Nullstelle hat. Die Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ erfüllt $\alpha$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <, 0, 1)$ nicht.*

*Folgende sprachliche Bestandteile kommen in der Formel vor: die Quantoren $\forall$ und $\exists$, die Variablen $a, b, c, x$ für Elemente von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Q}$, die Konstante $0$, die Funktionen $\cdot$ und $+$, aussagenlogische Junktoren, die Relationen $=$ und $<$, sowie, zur besseren bzw. eindeutigen Lesbarkeit, Klammern. Den Ausdruck $a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c$ nennen wir einen Term.*

In diesem Abschnitt klären wir zunächst den Begriff Struktur. $\mathbb{R}$ kann auf verschiedene Weise als Struktur aufgefasst werde:
$(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ ist der angeordnete Körper der reellen Zahlen. $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist die additive Gruppe der reellen Zahlen. $(\mathbb{R}, <)$ ist die lineare Ordnung der reellen Zahlen.

Diese verschiedenen Strukturen unterscheiden sich bereits durch ihre Vokabulare.

**Definition 3.2.** Ein *Vokabular* ist ein Quadrupel $(C, F, R, s)$, wobei $C$, $F$ und $R$ paarweise disjunkte Mengen sind und $s : F \cup R \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die *Stellenzahlfunktion* ist. Die Elemente von $C$ heißen *Konstantensymbole*, die von $F$ *Funktionssymbole* und die von $R$ *Relationssymbole*. Für jedes $z \in F \cup R$ ist $s(z)$ die *Stelligkeit* von $z$.

**Definition 3.3.** Sei $\tau = (C, F, R, s)$ ein Vokabular. Eine $\tau$-Struktur ist ein Paar

$$\mathcal{A} = (A, (z^{\mathcal{A}})_{z \in C \cup F \cup R}),$$

so dass gilt:

(1) $A$ ist nichtleere Menge (die *Trägermenge* von $\mathcal{A}$);
(2) für alle $c \in C$ ist $c^{\mathcal{A}} \in A$;
(3) für alle $f \in F$ und $n = s(f)$ ist $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$ Funktion;
(4) für alle $r \in R$ und $n = s(r)$ ist $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.

Für $z \in C \cup F \cup R$ heißt $z^{\mathcal{A}}$ die *Interpretation* von $z$ in $A$. Als Kurzschreibweise für $\mathcal{A}$ verwenden wir auch $(A, z^{\mathcal{A}})_{z \in C \cup F \cup R}$. Später, wenn keine Gefahr mehr besteht, dass wir Symbole und deren Interpretationen verwechseln, werden wir anstelle von $z^{\mathcal{A}}$ einfach $z$ schreiben. Das ist in der Mathematik allgemein üblich, und wir haben es oben auch schon getan. Ausserdem schreiben wir anstelle von $\tau = (C, F, R, s)$ einfach $\tau = C \cup F \cup R$ und stellen uns die Stellenzahlfunktion als implizit gegeben vor.

3.2. **Terme und ihre Werte in Strukturen.** Terme sind die einfachsten zusammengesetzten Bestandteile prädikatenlogischer Formeln. Oben haben wir bereits den Term $a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c$ gesehen. Aussagenlogische Formeln sind ebenfalls Terme (über dem entsprechenden Vokabular der aussagenlogischen Junktoren).

**Definition 3.4.** Sei $\tau = C \cup F \cup R$ ein Vokabular. Zusätzlich sei $X$ eine, üblicherweise abzählbar unendliche, Menge von (Individuen-) *Variablen.* Tm, die Menge der *Terme* über $\tau$, sei die kleinste Menge $M \subseteq (C \cup F \cup X)^*$ mit

(1) $C \subseteq M$;

(2) $X \subseteq M$;
(3) ist $f \in F$ ein $n$-stelliges Funktionssymbol und sind $t_1, \dots, t_n \in M$, so ist $ft_1 \dots t_n \in M$.

Genauer:

$$\mathrm{Tm} := \bigcap\{M \subseteq (C \cup F \cup X)^* : M \text{ erfüllt (1)–(3)}\}.$$

Man beachte, dass wir die Terme wieder in Polnischer Notation schreiben. Wegen der besseren Lesbarkeit schreiben wir für $ft_1 \dots t_n$ oft $f(t_1, \dots, t_n)$.

Für zweistellige Funktionssymbole wie zum Beispiel $+$ und $\cdot$ schreibt man oft $(t_1 + t_2)$ oder $(t_1 \cdot t_2)$ anstelle von $+t_1t_2$ bzw. $\cdot t_1t_2$. Bei dieser Infixschreibweise lassen wir äußere Klammern wieder weg.

Mit Hilfe eines einfachen Quersummenkriteriums kann man folgenden Satz über die eindeutige Lesbarkeit von Termen zeigen.

**Satz 3.5.** *Für $t \in \mathrm{Tm}$ ist entweder*
(1) *$t = x \in X$ (mit eindeutig bestimmtem $x \in X$) oder*
(2) *$t = c \in C$ (mit eindeutig bestimmtem $c \in C$) oder*
(3) *$t = ft_1 \dots t_n$ (mit eindeutig bestimmten $n$-stelligen $f \in F$ und) mit eindeutig bestimmten $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{Tm}$.*

**Definition 3.6.** Sei $t$ ein Term über $C \cup F \cup R$, zum Beispiel $t = z_1 \dots z_n$ ($t$ geschrieben als Wort in $(C \cup F \cup X)^*$). Die Menge der in $t$ vorkommenden Variablen sei $\mathrm{var}(t) := \{z_1, \dots, z_n\} \cap X$.

Ist $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X$, so schreiben wir für $t$ auch gerne $t(x_1, \dots, x_m)$, um anzudeuten, dass die in $t$ vorkommenden Variablen unter den Variablen $x_1, \dots, x_m$ sind. Dabei muss nicht jedes $x_i$ wirklich in $t$ vorkommen.

**Definition 3.7.** Sei $\tau$ Vokabular, $t = t(x_1, \dots, x_n)$ Term über $\tau$ und $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine $\tau$-Struktur. Außerdem seien $a_1 \dots, a_n \in A$. Wir definieren dann $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$, den *Wert* von $t$ unter der Belegung von $x_i$ mit $a_i$ induktiv über den Aufbau von $t$. (Dabei hängt $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$ nur von der Belegung der $x_i$ ab, die in $t$ tatsächlich vorkommen.) Diese induktive Definition funktioniert wegen Satz 3.5.
(1) Für $t = c \in C$ sei $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] := c^{\mathcal{A}}$.
(2) Für $t = x \in X$ gibt es ein $i$ mit $x = x_i$. Setze $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] := a_i$.
(3) Für $t = ft_1 \dots t_m$ mit $m$-stelligen $f \in F$ setze

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n], \dots, t_m^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]).$$

Man beachte, dass diese Definition vollkommen analog zur Definition des Wahrheitswerts einer aussagenlogischen Formel unter einer Belegung ist.

Man kann Terme in andere Terme einsetzen. Fixiere dazu ein Vokabular $\tau$. Im folgenden sind alle Terme Terme über $\tau$.

**Definition 3.8.** Sei $t = t(x_1, \dots, x_n)$ ein Term. Weiter seien $t_1, \dots, t_n$ Terme. Dann sei $t(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$ (oder kürzer $t(t_1, \dots, t_n))$) der Term, der aus $t$ durch simultanes Ersetzen von $x_i$ durch $t_i$ (für $1 \leq i \leq n$) entsteht.

**Lemma 3.9.** *Seien $t$ und $t_i$ wie in Definition 3.8.*

*a) Gilt $\mathrm{var}(t_i) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt auch $\mathrm{var}(t(t_1, \dots, t_n)) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}$.*

*b) Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine $\tau$-Struktur und $\overline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in A^m$. Dann ist*

$$t(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{A}}[\overline{a}] = t^{\mathcal{A}}[t_1^{\mathcal{A}}[\overline{a}], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[\overline{a}]].$$

*Beweis.* Induktion über den Termaufbau. $\square$

3.3. **Prädikatenlogische Formeln und ihre Gültigkeit in Strukturen.** Wir arbeiten über dem Alphabet

$$Z = C \cup F \cup R \cup X \cup \{\equiv, (, ), \neg, \vee, \exists\},$$

wobei $\tau$ ein festes, aber beliebiges Vokabular ist und $X$ eine unendliche Menge von Variablen.

**Definition und Bemerkung 3.10.** *Atomare Formeln* über $Z$ sind genau die Wörter über $Z$, die die Form

a) $t \equiv t'$ ($t$ und $t'$ Terme über $\tau$) oder
b) $rt_1 \dots t_n$ ($r \in R$ $n$-stelliges Relationssymbol und $t_1, \dots, t_n$ Terme über $\tau$)

haben.

Atomare Formeln sind eindeutig lesbar, wie man mit den üblichen Methoden zeigt. Wir unterscheiden das Gleichheitszeichen $\equiv$ der formalen Sprache von dem Gleichheitszeichen $=$ der Metasprache (mit der wir über die formale Sprache reden).

**Definition und Bemerkung 3.11.** Wir definieren die Menge Fml neu. Die Menge $\mathrm{Fml} = \mathrm{Fml}_\tau$ der (*prädikatenlogischen*) *Formeln* über $\tau$ ist die kleinste Menge $M \subseteq Z^*$ mit

(1) jede atomare Formel ist in $M$;
(2) mit $\alpha$ ist auch $\neg\alpha$ in $M$;
(3) mit $\alpha$ und $\beta$ ist auch $(\alpha \vee \beta)$ in $M$;
(4) für $\alpha \in M$ und $x \in X$ ist $\exists x\alpha \in M$.

Wieder sieht man mit den üblichen Methoden, dass die Formeln eindeutig lesbar sind.

**Definition und Bemerkung 3.12.** Wir erlauben offiziell nur die aussagenlogischen Junktoren $\neg$ und $\vee$, da das verschiedene Definitionen und Beweise verkürzt. Da $\{\neg, \vee\}$ aber eine aussagenlogische Basis ist, können wir jeden anderen Junktor durch $\neg$ und $\vee$ ausdrücken. Konkret definieren wir folgende Abkürzungen:

Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Fml}$ und $x \in X$ sei

$(\alpha \wedge \beta)$ (metasprachliche) Abkürzung für $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$,
$(\alpha \to \beta)$ Abkürzung für $(\neg\alpha \vee \beta)$,
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Abkürzung für $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ und
$\forall x\alpha$ Abkürzung für $\neg\exists x\neg\alpha$.

Außenklammern wie in $(\alpha \to \beta)$ werden meist weggelassen.

**Definition 3.13.** a) Sei $\alpha \in \mathrm{Fml}$, etwa $\alpha = z_1 \dots z_n$ mit $z_1, \dots, z_n \in Z$. Wir definieren die Menge der in $\alpha$ vorkommenden Variablen als

$$\mathrm{var}(\alpha) := \{z_1, \dots, z_n\} \cap X.$$

b) Durch Induktion über den Formelaufbau definieren wir die Menge $\mathrm{frvar}(\alpha)$ der in $\alpha$ *frei* vorkommenden Variablen.

Ist $\alpha$ atomar, so sei $\mathrm{frvar}(\alpha) := \mathrm{var}(\alpha)$. Für $\alpha = \neg\beta$ sei $\mathrm{frvar}(\alpha) := \mathrm{frvar}(\beta)$. Für $\alpha = \beta \vee \gamma$ sei $\mathrm{frvar}(\alpha) := \mathrm{frvar}(\beta) \cup \mathrm{frvar}(\gamma)$. Für $\alpha = \exists x\beta$ sei $\mathrm{frvar}(\alpha) := \mathrm{frvar}(\beta) \setminus \{x\}$.

c) Wir schreiben $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ anstelle von $\alpha$, um $\mathrm{frvar}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ anzudeuten. Die $x_i$ seien dabei jeweils paarweise verschieden. Eine Formel $\alpha$ ist eine *Aussage*, falls $\mathrm{frvar}(\alpha)$ leer ist.

**Beispiel 3.14.** *a) Sei $\tau := \{+, \cdot\}$. Betrachte die Formeln*

$$\alpha := \exists x(x \cdot x \equiv y) \quad \text{und} \quad \beta := \exists y(y + y \equiv x).$$

*In $\alpha$ ist die Variable $y$ frei, d.h., sie ist nicht durch einen Quantor gebunden. In $\alpha \vee \beta$ kommen sowohl $x$ als auch $y$ an mindestens einer Stelle frei vor.*

*b) Sei* $\tau := \{<\}$,

$$\alpha := \exists z(x < z \wedge z < y)$$

*und*

$$\beta := \forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y)).$$

*Dann gilt* $\mathrm{var}(\alpha) = \mathrm{var}(\beta) = \{x, y, z\}$, $\mathrm{frvar}(\alpha) = \{x, y\}$ *und* $\mathrm{frvar}(\beta) = \emptyset$. *Damit ist* $\beta$ *Aussage,* $\alpha$ *jedoch nicht.*

Als nächstes definieren wir die Gültigkeit einer Formel in einer Struktur.

**Definition 3.15.** Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine $\tau$-Struktur, $a_1, \dots, a_n \in A$ und $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel über $\tau$. Induktiv über den Formelaufbau definieren wir, wann die Relation

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

gilt. $\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ liest man als „$(a_1, \dots, a_n)$ erfüllt $\alpha$ in $\mathcal{A}$", „in $\mathcal{A}$ gilt $\alpha$ für $(a_1, \dots, a_n)$" oder auch „$\mathcal{A}$ glaubt $\alpha[a_1, \dots, a_n]$".

(1) Sei $\alpha$ atomar. Ist $\alpha$ von der Form $t_1 \equiv t_2$ für zwei Terme $t_1(x_1, \dots, x_n)$ und $t_2(x_1, \dots, x_n)$, so setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] = t_2^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n].$$

Ist $\alpha$ von der Form $rt_1 \dots t_m$ für ein $m$-stelliges Relationssymbol $r$ und Terme $t_1, \dots, t_m$, so setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n], \dots, t_m^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) \in r^{\mathcal{A}}.$$

(2) Sei $\alpha$ von der Form $\beta \vee \gamma$. Dann setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta[a_1, \dots, a_n] \text{ oder } \mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_n].$$

(3) Sei $\alpha$ von der Form $\neg\beta$. Dann setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \beta[a_1, \dots, a_n].$$

(4) Sei $\alpha$ schließlich von der Form $\exists x \beta$ mit $\beta = \beta(x, x_1, \dots, x_n)$. Dann setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

genau dann, wenn es ein $a \in A$ gibt, für das gilt:

$$\mathcal{A} \models \beta[a, a_1, \dots, a_n]$$

Ist $\alpha$ eine Aussage, so hängt die Gültigkeit von $\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ nicht von $a_1, \dots, a_n$ ab. Wir schreiben in diesem Fall einfach $\mathcal{A} \models \alpha$.

Die Formeln in $\mathrm{Fml}_\tau$ nennt man auch *erststufige* Formeln, da nur über Elemente der Trägermengen von Strukturen quantifiziert wird. Es gibt auch zweitstufige Formeln, in denen zum Beispiel auch über Teilmengen der Trägermengen quantifiziert werden kann. Zweitstufige Formeln sind viel ausdrucksstärker als erststufige, aber die erststufige Logik hat weit bessere strukturelle Eigenschaften als die zweitstufige.

### 3.4. **Beispiele erststufiger Theorien.**

**Definition 3.16.** Sei $\tau$ ein Vokabular. Eine *Theorie* (über $\tau$) ist eine Menge von Aussagen (über $\tau$). Sei $T$ eine Theorie. Die *Modellklasse* $\mathrm{Mod}(T)$ von $T$ ist die Klasse der $\tau$-Strukturen $\mathcal{A}$, die alle Aussagen $\alpha \in T$ erfüllen. Eine Klasse $K$ von $\tau$-Strukturen ist *axiomatisierbar*, wenn es eine Theorie $T$ mit $\mathrm{Mod}(T) = K$ gibt.

Sei $\mathcal{A}$ eine $\tau$-Struktur. Die Theorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ ist die Menge aller Aussagen, die $\mathcal{A}$ erfüllt.

In den folgenden Beispielen sind führende Allquantoren bei Aussagen weggelassen.

**Beispiel 3.17.** *a) Es gibt zwei sinnvolle Vokabulare für Gruppen, nämlich* $\tau_1 := \{\cdot, e, ^{-1}\}$ *und* $\tau_2 := \{\cdot\}$. *Im Falle von* $\tau_1$ *axiomatisiert die Menge* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_3\}$ *von Axiomen die Klasse aller Gruppen wobei*

$$\begin{aligned} \varphi_1 = {} & x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z; \\ \varphi_3 = {} & x \cdot e \equiv x \wedge e \cdot x \equiv x; \\ \varphi_2 = {} & x \cdot x^{-1} \equiv e \wedge x^{-1} \cdot x \equiv e. \end{aligned}$$

*Über dem Vokabular* $\tau_2$ *lässt sich die Klasse aller Gruppen axiomatisieren durch* $\{\varphi_1, \varphi_2', \varphi_3'\}$, *wobei*

$$\begin{aligned} \varphi_2' = {} & \exists x \forall y (x \cdot y \equiv y \wedge y \cdot x \equiv y); \\ \varphi_3' = {} & \forall y (x \cdot y \equiv y \wedge y \cdot x \equiv y) \to \forall y \exists z (y \cdot z \equiv x \wedge z \cdot y \equiv x). \end{aligned}$$

*b) Um über abelsche Gruppen zu sprechen, eignen sich die beiden Vokabulare* $\tau_1$ *und* $\tau_2$, *wobei man im abelschen Falle für* $\cdot$, $e$ *und* $^{-1}$ *oft* $+$, $0$ *und* $-$ *schreibt (*$-$ *ist dabei als einstelliges Funktionsymbol gemeint, nicht als zweistelliges).*

*Zu den Axiomen für Gruppen kommt für die abelschen Gruppen noch das Axiom*

$$\varphi_4 = x \cdot y \equiv y \cdot x$$

*hinzu.*

*c) Torsionsfreie abelsche Gruppen sind abelsche Gruppen, in denen jedes von* $0$ *verschiedene Element unendliche Ordnung hat (d.h., kein Vielfaches des Elements ist* $0$*), wie zum Beispiel* $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$, *und* $(\mathbb{R}, +, 0, -)$. *Torsionsfreie abelsche Gruppen axiomatisiert man mit den Axiomen für abelsche Gruppen (der Einfachheit halber über* $\tau_1$*) zusammen mit den Axiomen* $\psi^n$ *für alle* $n > 0$, *wobei*

$$\varphi_5^n = \neg x \equiv 0 \to \neg nx \equiv 0$$

*Dabei ist* $nx$ *die Abkürzung für die Summe* $x + \dots + x$ *mit* $n$ *Summanden.*

**Beispiel 3.18.** *a) Das Vokabular* $\{+, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1\}$ *eignet sich, um über Körper zu sprechen. Die Körperaxiome sind hoffentlich bekannt. Die einzige Subtilität ist die folgende: Die Funktion* $^{-1}$ *ist auf* $0$ *nicht definiert. Man behilft sich wie folgt: In einer gegebenen Struktur definiert man* $0^{-1}$ *irgendwie, zum Beispiel* $0^{-1} = 0$, *und verspricht, die Funktion* $^{-1}$ *niemals auf* $0$ *anzuwenden.*

*b) Um algebraische abgeschlossene Körper (wie zum Beispiel* $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$*) zu axiomatisieren benutzt man die Körperaxiome aus a) zusammen mit den Axiomen* $\chi_n$ *für jedes* $n > 1$, *wobei*

$$\chi_n = \exists x (x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0)$$

*Dabei ist* $x^k$ *die Abkürzung für das Produkt* $x \cdot \dots \cdot x$ *mit* $k$ *Faktoren. Ein Ausdruck der Form* $ax$ *ist Abkürzung für* $a \cdot x$.

**Beispiel 3.19.** *Sei* $K$ *ein fester Körper und 1 das neutrale Element der multiplikativen Gruppe von* $K$. *Ein geeignetes Vokabular für die Klasse der* $K$*-Vektorräume ist* $\{+, 0, -\} \cup \{m_k : k \in K\}$. *Dabei sind die* $m_k$ *einstellige Funktionssymbole, die für die Multiplikation mit dem jeweiligen Körperelement* $k$ *stehen. Die Axiome für die Klasse der Vektorräume sind zunächst die Axiome für abelsche Gruppen (geschrieben mit dem Vokabular* $\{+, 0, -\}$*) zusammen mit* $\varphi_5^{k,l}$, $\varphi_6^{k,l}$, $\varphi_7^k$ *und* $\varphi_8$ *für alle* $k, l \in K$, *wobei*

$$\begin{aligned} \varphi_5^{k,l} = {} & m_{k \cdot l}(x) \equiv m_k(m_l(x)), \\ \varphi_6^{k,l} = {} & m_{k+l}(x) \equiv m_k(x) + m_l(x), \\ \varphi_7^k = {} & m_k(x + y) \equiv m_k(x) + m_k(y), \\ \varphi_8 = {} & m_1(x) \equiv x. \end{aligned}$$

**Beispiel 3.20.** *Ein in der Modelltheorie populäres Beispiel ist die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte. Das Vokabular für lineare Ordnungen ist* $\{<\}$. *Die Axiome lauten*

$\alpha_1 = (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z,$
$\alpha_2 = \neg x < x,$
$\alpha_3 = x < y \vee x \equiv y \vee y < x,$
$\alpha_4 = x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y),$
$\alpha_5 = \exists y y < x,$
$\alpha_6 = \exists y x < y.$

*Ein Beispiel einer dichten linearen Ordnung ohne Endpunkte ist* $(\mathbb{Q}, <)$.

Die bisher vorgestellten Theorien axiomatisieren wohlbekannte Klassen von Strukturen. Meistens interessiert man sich für mehrere oder gar alle Strukturen in einer solchen Klassen. Die beiden folgenden Theorien dienen eher dazu, eine Struktur zu beschreiben, nämlich die natürlichen Zahlen und die Klasse aller Mengen (die streng genommen gar keine Struktur ist, weil der Individuenbereich eben eine echte Klasse und keine Menge ist).

**Beispiel 3.21.** *Das Vokabular der (erststufigen)* Peano-Arithmetik *ist* $\{0, '\}$. *Die angestrebte Interpretation von* $'$ *ist die Nachfolgerabbildung, die jeder natürlichen Zahl* $n$ *ihren Nachfolger* $n+1$ *zuordnet. Das ersten beiden Axiome der Peano-Arithmetik sind*

$\beta_1 = \neg x \equiv y \rightarrow \neg x' \equiv y'$ *und*
$\beta_2 = \neg 0 \equiv x'.$

*Dazu kommen noch die Axiome* $\beta_3^\varphi$, *die wie folgt definiert werden: Für jede Formel* $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ *sei*

$\beta_3^\varphi = (\varphi(0, \overline{x}) \wedge \forall x(\varphi(x, \overline{x}) \rightarrow \varphi(x', \overline{x}))) \rightarrow \forall x \varphi(x, \overline{x}).$

*Dabei steht* $\overline{x}$ *für* $x_1, \dots, x_n$ *und* $\varphi(0, \overline{x})$ *für die Formel, die man erhält, wenn man jedes* $x$, *das in* $\varphi(x, \overline{x})$ *vorkommt, durch das Konstantensymbol* $0$ *ersetzt.*

*Das Axiomenschema* $\beta_3^\varphi$, $\varphi = \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ *Formel, würde man intuitiv als ein Axiom schreiben, nämlich*

$\beta_3^2 = \forall M((0 \in M \wedge \forall x(x \in M \rightarrow x' \in M)) \rightarrow \forall x(x \in M)),$

*wobei* $M$ *über alle Teilmengen von* $\mathbb{N}$ *läuft. Allerdings ist das Axiom* $\beta_3^2$, *wie die Bezeichnung schon andeutet, eine zweitstufige Aussage, die sich in der (erststufigen) Prädikatenlogik nicht formulieren lässt.*

*In unserem Schema* $\beta_3^\varphi$ *behilft man sich, in dem man nur über definierbare* $M$ *redet.*

*Wie oben schon angekündigt ist* $(\mathbb{N}, 0, +1)$ *Modell der Peano-Arithmetik. Während die zweitstufige Peano-Arithmetik, in der man anstelle der* $\beta_3^\varphi$ *das zweitstufige Axiom* $\beta_3^2$ *benutzt, die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt, gibt es Modelle der erststufigen Peano-Arithmetik, die nicht zu den natürlichen Zahlen isomorph sind. Wie wir später sehen werden, gibt es überhaupt keine erststufige Theorie, die die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt.*

**Beispiel 3.22.** *Die* Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre *(*ZF*) hat das sehr übersichtliche Vokabular* $\tau := \{\varepsilon\}$. *Die Menge der Axiome von ZF ist*

$$\{\mathrm{Ext}, \mathrm{Paar}, \mathrm{Ver}, \mathrm{Pot}, \mathrm{Fund}, \mathrm{Un}\} \cup \{\mathrm{Auss}_\varphi, \mathrm{Ers}_\varphi : \varphi \in \mathrm{Fml}_\tau\}.$$

*Die beabsichtigte Interpretation von* $\varepsilon$ *ist dabei die Elementrelation* $\in$. *Die Axiome sind wie folgt definiert:*

- Ext *(Extensionalitätsaxiom):*

$$\forall z(z \,\varepsilon\, x \leftrightarrow z \,\varepsilon\, y) \rightarrow x \equiv y$$

*Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.*

- Paar *(Paarmengenaxiom):*

$$\exists z(x \,\varepsilon\, z \wedge y \,\varepsilon\, z)$$

*Für je zwei Mengen $x$ und $y$ existiert eine Menge, die mindestens die Elemente $x$ und $y$ hat.*

- Ver *(Vereinigungsaxiom):*

$$\exists U \forall y(y \,\varepsilon\, x \rightarrow \forall z(z \,\varepsilon\, y \rightarrow z \,\varepsilon\, U))$$

*Für jede Menge $x$ existiert eine Menge $U$ mit $\bigcup x \subseteq U$.*

- Pot *(Potenzmengenaxiom):*

$$\exists P \forall y(\forall z(z \,\varepsilon\, y \rightarrow z \,\varepsilon\, x) \rightarrow y \,\varepsilon\, P)$$

*Für jede Menge $x$ existiert eine Menge $P$ mit $\mathcal{P}(x) \subseteq P$.*

- Fund *(Fundierungsaxiom):*

$$\exists y y \,\varepsilon\, x \rightarrow \exists y(y \,\varepsilon\, x \wedge \forall z(z \,\varepsilon\, x \rightarrow \neg z \,\varepsilon\, y))$$

*Jede nichtleere Menge $x$ enthält ein $\in$-minimales Element. Zusammen mit den anderen Axiomen folgt daraus, dass es keine unendlichen, bzgl. $\in$ fallenden Folgen gibt.*

- Un *(Unendlichkeitsaxiom):*

$$\exists x(\exists y y \in x \wedge \forall y(y \,\varepsilon\, x \rightarrow y \cup \{y\} \,\varepsilon\, x))$$

*Es gibt eine unendliche Menge. Genauer, es gibt eine nichtleere Menge, die unter der Abbildung $y \mapsto y \cup \{y\}$ abgeschlossen ist. Dabei ist $y \cup \{y\} \,\varepsilon\, x$ Abkürzung für*

$$\exists z(z \,\varepsilon\, x \wedge y \,\varepsilon\, z \wedge \forall r(r \,\varepsilon\, y \rightarrow r \,\varepsilon\, z) \wedge \forall r(r \,\varepsilon\, z \rightarrow (r \equiv y \vee r \,\varepsilon\, y))).$$

- $\mathrm{Auss}_\varphi$ *(Aussonderungsaxiom):*

$$\exists y \forall z(z \,\varepsilon\, y \leftrightarrow (z \,\varepsilon\, x \wedge \varphi(z, y_1, \dots, y_n)))$$

*Für jede Menge $x$ und alle $y_1, \dots, y_n$ ist $\{y \in x : \varphi(y, y_1, \dots, y_n)\}$ eine Menge.*

- $\mathrm{Ers}_\varphi$ *(Ersetzungsaxiom):*

$$\begin{aligned}\forall x \exists y(\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n) \wedge \forall z(\varphi(x, z, x_1, \dots, x_n) \rightarrow y \equiv z))\\ \rightarrow \forall r \exists s \forall x(x \,\varepsilon\, r \rightarrow \exists y(y \,\varepsilon\, s \wedge \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n)))\end{aligned}$$

*Für jede (definierbare) Abbildung $f$ und jede Menge $r$ existiert eine Menge $s$ mit $f[r] \subseteq s$.*

*Üblicherweise fordert man, dass die Klasse $V$, die Klasse aller Mengen, zusammen mit der Relation $\in$ ein Modell von ZF ist. Dabei muss man etwas aufpassen, da $(V, \in)$ in unserem Sinne keine Struktur ist, da $V$ eben eine echte Klasse ist und keine Menge. In der Mengenlehre sind alle Objekte, über die geredet wird, Mengen.*

*Die Axiome von ZF sagen einem im wesentlichen, wie man aus schon bekannten Mengen neue Mengen konstruieren kann. Insbesondere erlauben diese Axiome die Konstruktion der Menge der natürlichen Zahlen, der Menge der reellen Zahlen usw. Dabei muss man sich allerdings überlegen, was die natürlichen Zahlen eigentlich sein sollen. Da nur über Mengen geredet wird, muss auch jede Zahl eine Menge sein. Üblicherweise definiert man $0$ als die leere Menge, $1$ als die Menge $\{0\}$, $2$ als $\{0, 1\}$ und allgemein $n + 1$ als $\{0, 1, \dots, n\}$. Kennt man die natürlichen Zahlen, so ist es* *leicht, zunächst die ganzen Zahlen, dann die rationalen Zahlen und schließlich die reellen Zahlen zu konstruieren.*

*Insgesamt garantieren die Axiome von ZF die Existenz von ausreichend vielen Mengen, um praktisch jedes mathematische Objekt auf natürliche Weise als Menge auffassen zu können. Ein mathematischer Satz wird (im wesentlichen) genau dann als wahr anerkannt, wenn er aus ZF bzw. aus ZFC, ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom (welches in ZF zum Zornschen Lemma äquivalent ist), folgt.*

*Die Modelle der Theorie ZF werden* Modelle der Mengenlehre *genannt. Diese muss man suchen, wenn man zeigen will, dass gewisse Aussagen nicht aus ZF folgen. Die psychologische Hauptschwierigkeit beim Verständnis der Modelle von ZF liegt darin, dass man einerseits innerhalb dieser Modelle Mathematik betreiben kann (so wie wir in $V$ arbeiten) und andererseits die Modelle selbst mit mathematischen Methoden untersuchen kann wie Gruppen, Ringe oder Körper.*

3.5. **Substitution und gebundene Umbenennung.** Wir benötigen eine syntaktische Operation auf den Formeln, das Einsetzen eines Termes für eine Variable (*Substitution*). Wie folgendes Beispiel zeigt, muss man dabei etwas aufpassen.

**Beispiel 3.23.** *Betrachte die Formel $\alpha(x) = \exists y(y \cdot y \equiv x)$. Die Formel bedeutet (zum Beispiel in $\mathbb{N}$) „$x$ ist Quadrat“. Setzt man für $x$ den Term $x + y$ ein (*substituiert *man $x$ durch $x + y$), so erhält man eine Formel, die man $\alpha(x/x + y)$ nennen könnte. Diese Formel sollte bedeuten „$x + y$ ist Quadrat“. Substituiert man naiv, so erhält man aber die Formel*

$$\alpha(x/x + y) = \exists y(y \cdot y = x + y),$$

*die offenbar etwas anderes bedeutet als „$x + y$ ist Quadrat“. Zum Beispiel gilt $\alpha(x/x + y)$ in $\mathbb{N}$ für $x = 2$. Setzt man aber für $y$ die Zahl 3 ein, so ist $x + y = 5$, also keine Quadratzahl. Trotzdem gilt*

$$\mathbb{N} \models \alpha(x/x + y)[2, 3],$$

*da $y$ in der Formel keine freie Variable mehr ist und damit der Wert, den man für $y$ einsetzt, keine Auswirkung auf die Gültigkeit hat.*

**Definition 3.24.** a) Sei $\alpha$ eine prädikatenlogische Formel, $\exists x\beta$ eine Teilformel von $\alpha$, wobei die Menge der Teilformeln von $\alpha$ wieder auf die naheliegende Weise induktiv über den Formelaufbau definiert ist. Dann heißt $\beta$ der *Wirkungsbereich* von $\exists x$.

Wir nennen ein Vorkommen einer Variable $x$ in einer Formel $\alpha$ *gebunden*, falls dieses Vorkommen von $x$ im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists x$ liegt. (Dabei zählen wir das Vorkommen von $x$ in $\exists x$ nicht als Vorkommen von $x$.)

Jedes andere Vorkommen von $x$ in $\alpha$ heißt *frei*.

b) Sei $t$ ein Term, $\alpha$ eine Formel und $x$ eine Variable. Dann heißt $t$ *frei für $x$ in $\alpha$*, falls keine Variable $y$ von $t$ durch Ersetzen von $x$ durch $t$ in den Wirkungsbereich eines Quantors $\exists y$ gerät.

Mit anderen Worten, $t$ ist frei für $x$ in $\alpha$, falls für kein $y \in \operatorname{var}(t)$ ein freies Vorkommen von $x$ im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists y$ liegt.

c) Sei $\alpha$ eine Formel, $x \in \operatorname{frvar}(\alpha)$ und $t$ ein Term. Wir definieren die *Substitution* von $x$ durch $t$ wie folgt:

Angenommen, $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{var}(t)$ sind die Variablen, die an Stellen in $\alpha$ gebunden sind, an denen $x$ frei vorkommt. Wähle Variablen $y_1, \dots, y_n$, die weder in $t$ noch in $\alpha$ vorkommen. Ersetze $x_i$ in $\alpha$ an jeder Stelle durch $y_i$, an der $x_i$ gebunden vorkommt. Ersetze jeden Quantor $\exists x_i$ in $\alpha$ durch $\exists y_i$. Setze schließlich $t$ für $x$ ein, und zwar an jeder Stelle, an der $x$ in $\alpha$ frei vorkommt.

Das liefert die Formel $\alpha(x/t)$.

d) Analog zu c) definiert man die simultane Substition mehrerer Variablen durch Terme. Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel und $t_1, \dots, t_n$ Terme. Angenommen $y_1, \dots, y_m \in \mathrm{var}(t_1) \cup \dots \mathrm{var}(t_n)$ sind die Variablen $y$ für die folgendes gilt: $y$ kommt in $t_i$ vor und ist gebunden an einer Stelle in $\alpha$, an der $x_i$ frei vorkommt.

Wähle Variablen $z_1, \dots, z_m$, die weder in $\alpha$ noch in den $t_i$ vorkommen. Ersetze jedes gebundene Vorkommen von $y_j$ in $\alpha$ durch $z_j$ und jeden Quantor $\exists y_j$ durch $\exists z_j$ (für alle $j \in \{1, \dots, m\}$). Ersetze danach $x_i$ jedes freie Vorkommen von $x_i$ in $\alpha$ durch $t_i$. Das liefert die Formel $\alpha(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$.

Es gelten folgende intuitiv einleuchtende Sätze über Substitution und gebundene Umbenennung.

**Satz 3.25** (Satz über gebundene Umbenennung). *Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel und $x$ eine Variable (die auch unter den $x_i$ sein darf). Sei $y$ eine Variable, die in $\alpha$ nicht vorkommt. Sei $\alpha'$ die Formel, die aus $\alpha$ entsteht, wenn man jedes gebundene Vorkommen von $x$ in $\alpha$ durch $y$ ersetzt und jeden Quantor $\exists x$ durch $\exists y$. Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine Struktur und $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha'[a_1, \dots, a_n].$$

**Satz 3.26** (Substitutionssatz). *Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ Formel und $t_1, \dots, t_n$ Terme. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $t_i$ frei für $x_i$ in $\alpha$. Sei*

$$\beta := \alpha(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n).$$

*Weiter sei*

$$\mathrm{var}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_n) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}.$$

*Dann gilt für alle $b_1, \dots, b_m \in A$:*

$$\mathcal{A} \models \beta[b_1, \dots, b_m] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

*mit $a_i := t_i^{\mathcal{A}}[b_1, \dots, b_m]$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Insgesamt erhält man

**Korollar 3.27.** *Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ Formel und $t_1, \dots, t_n$ Terme. Sei*

$$\beta := \alpha(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n).$$

*Weiter sei*

$$\mathrm{var}(t_1) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_n) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}.$$

*Dann gilt für alle $b_1, \dots, b_m \in A$:*

$$\mathcal{A} \models \beta[b_1, \dots, b_m] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

*mit $a_i := t_i^{\mathcal{A}}[b_1, \dots, b_m]$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.*

3.6. **Formales Ableiten in der Prädikatenlogik.** Die Erfüllungsrelation $\models$ legt folgende Definitionen nahe:

**Definition 3.28.** Sei $T$ eine Theorie über dem Vokabular $\tau$ und $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ Formel über $\tau$. Dann *folgt $\alpha$ inhaltlich* (*semantisch*) aus $T$ ($T \models \alpha$), wenn für jede $\tau$-Struktur $\mathcal{A} = (A, \dots)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models T \Rightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

Dabei bedeutet $\mathcal{A} \models T$, dass $\mathcal{A}$ Modell jeder Aussage in $T$ ist.

Eine Formel $\alpha$ heißt *allgemeingültig*, wenn $\emptyset \models \alpha$ gilt, wenn also $\alpha$ aus der leeren Theorie folgt. Mit anderen Worten, $\alpha$ ist allgemeingültig, wenn $\alpha$ in jeder Struktur (über dem richtigen Vokabular) unter jeder Belegung der freien Variablen wahr ist.

Zwei Formeln $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ und $\beta(x_1, \dots, x_n)$ sind (*semantisch*) *äquivalent*, wenn für alle Strukturen $\mathcal{A} = (A, \dots)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta[a_1, \dots, a_n]$$

Wir schreiben in diesem Fall $\alpha \approx \beta$.

Ziel dieses Abschnittes ist es, auf rein syntaktische Weise eine Relation $\vdash$ der formalen Ableitbarkeit zwischen Theorien und Formeln zu definieren, von der wir später zeigen werden, dass sie mit $\models$ übereinstimmt.

**Definition 3.29.** Wir werden einen Kalkül einführen, der aus *Axiomen* und *Regeln* besteht. Axiome sind dabei gewisse Formeln über $\tau$. Regeln sind Paare $(p, k)$, wobei $p$ eine endliche Menge von Formeln ist und $k$ eine Formel. Die Menge $p$ heißt *Prämisse*, die Formel $k$ *Konklusion*. Ist $(p, k)$ Regel, so *geht $k$ aus $p$ hervor*. Eine Regel $(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \beta)$ schreibt man üblicherweise als

$$\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}.$$

Sei $T$ eine Theorie und $\alpha$ eine Formel. Dann ist $\alpha$ aus $T$ *ableitbar* ($T \vdash \alpha$), falls es eine endliche Folge $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von Formeln mit $\alpha = \alpha_n$ gibt, so dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

(1) die Formel $\alpha_i$ ist Axiom oder Element von $T$ oder
(2) $\alpha_i$ geht (durch Anwenden einer Regel) aus einer Teilmenge von $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}\}$ hervor.

Eine Folge $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wie oben heißt *Beweis*.

Um unseren Kalkül einzuführen, benötigen wir noch ein paar Begriffe, die die Aussagenlogik mit der Prädikatenlogik in Verbindung bringen.

**Definition und Bemerkung 3.30.** a) Eine Formel $\alpha \in \mathrm{Fml}_\tau$ heißt *prädikatenlogische Tautologie*, wenn es eine Aussagenlogische Tautologie $\rho = \rho(p_1, \dots, p_n)$ und Formeln $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathrm{Fml}_\tau$ gibt, so dass $\alpha$ aus $\rho$ durch Ersetzen der Aussagenvariablen $p_i$ durch die Formel $\beta_i$ (für alle $i \in \{1, \dots, n\}$) hervorgeht.

b) Jede prädikatenlogische Tautologie ist allgemeingültig.

c) Eine Formel $\beta \in \mathrm{Fml}_\tau$ heißt (*aussagenlogisch*) *unzerlegbar*, wenn $\beta$ atomar ist oder von der Form $\exists x\gamma$ für ein $\gamma \in \mathrm{Fml}_\tau$. Jedes $\alpha \in \mathrm{Fml}_\tau$ lässt sich auf genau eine Weise mit Hilfe von $\neg$ und $\vee$ aus unzerlegbaren Formeln aufbauen.

d) Die Eigenschaft, prädikatenlogische Tautologie zu sein, ist entscheidbar. Sei nämlich $\alpha \in \mathrm{Fml}_\tau$ aus den unzerlegbaren Formeln $\beta_1, \dots, \beta_n$ mit Hilfe von $\neg$ und $\vee$ zusammengesetzt. Seien $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschiedene Aussagenvariablen und $\rho$ die aussagenlogische Formel, die man aus $\alpha$ erhält, wenn man jedes $\beta_i$ durch $p_i$ ersetzt. Die Formel $\alpha$ ist genau dann prädikatenlogische Tautologie, wenn $\rho$ aussagenlogische Tautologie ist. Letzteres lässt sich aber mit dem Wahrheitstafelverfahren entscheiden.

**Definition 3.31.** Die Axiome unseres Kalküls sind die folgenden:

(1) Aussagenlogische Axiome: jede prädikatenlogische Tautologie ist Axiom.
(2) Identitätslogische Axiome: für jedes $n$-stellige Funktionssymbol $f$, jedes $n$-stellige Relationssymbol $r$ und Variablen $x, y, z, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sind folgende Formeln Axiome:

$$x \equiv x$$
$$x \equiv y \rightarrow y \equiv x$$
$$(x \equiv y \wedge y \equiv z) \rightarrow x \equiv z$$
$$(x_1 \equiv y_1 \wedge \dots \wedge x_n \equiv y_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(y_1, \dots, y_n)$$
$$(x_1 \equiv y_1 \wedge \dots \wedge x_n \equiv y_n) \rightarrow (r(x_1, \dots, x_n) \rightarrow r(y_1, \dots, y_n))$$

(3) Substitutionsaxiome: Für jede Formel $\alpha$, jede Variable $x$ uns jeden Term $t$ ist

$$\alpha(x/t) \rightarrow \exists x\alpha$$

ein Axiom.

Der Kalkül hat folgende Regeln:

(1) Modus Ponens: für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Fml}_\tau$ ist
$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$
eine Regel

(2) Existenzregel: für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Fml}_\tau$ und alle $x \in X$ mit $x \notin \mathrm{frvar}(\beta)$ ist
$$\frac{\alpha \to \beta}{\exists x \alpha \to \beta}$$
eine Regel.

**Lemma 3.32.** *Die Eigenschaft einer endlichen Folge $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von Formeln, Beweis einer Formel $\alpha$ aus einer endlichen Theorie $T$ zu sein, ist entscheidbar.*

*Beweis.* Für jede Formel $\beta$ ist entscheidbar, ob $\beta$ prädikatenlogische Tautologie ist. Es ist auch entscheidbar, ob $\beta$ identitätslogisches Axiom ist und ob $\beta$ Substitutionsaxiom ist. Da $T$ endlich ist, ist auch $\beta \in T$ entscheidbar. Schließlich ist für jede endliche Menge $p$ von Formeln und jede Formel $k$ entscheidbar, ob $(p, k)$ Regel ist. Damit lässt sich durch Induktion über $n$ zeigen, dass entscheidbar ist, ob $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Beweis aus $T$ ist. Ob $\alpha_n = \alpha$ gilt, ist offenbar auch entscheidbar. $\square$

**Satz 3.33** (Korrektheitssatz)**.** *Sei $T$ eine Theorie und $\alpha$ Formel. Wenn $T \vdash \alpha$ gilt, dann auch $T \models \alpha$.*

*Beweis.* Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Beweis von $\alpha$ aus $T$. Wir zeigen durch Induktion über $i \in \{1, \dots, n\}$, dass $T \models \alpha_i$ für alle $i$ gilt.

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ gilt $T \models \alpha_j$. Da $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Beweis ist, trifft einer der folgenden Fälle zu:

(1) $\alpha_i$ ist prädikatenlogische Tautologie;
(2) $\alpha_i$ ist identitätslogisches Axiom;
(3) $\alpha_i$ ist von der Form $\beta(x/t) \to \exists x \beta$;
(4) $\alpha_i$ geht durch Anwendung von Modus Ponens aus einer Teilmenge von $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ hervor. Insbesondere existieren $k, j \in \{1, \dots, i-1\}$, so dass $\alpha_k$ von der Form $\alpha_j \to \alpha_i$ ist.
(5) $\alpha_i$ geht durch Anwendung der Existenzregel aus einer Teilmenge von $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ hervor. Insbesondere ist $\alpha_i$ von der Form $\exists x \beta \to \gamma$ mit $x \notin \mathrm{frvar}\, \gamma$ und es gibt $j \in \{1, \dots, i-1\}$ mit $\alpha_j = \beta \to \gamma$.

Sei nun $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine Struktur mit $\mathcal{A} \models T$. Sei $\mathrm{frvar}(\alpha_i) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$, und seien $a_1, \dots, a_m \in A$. Wir haben $\mathcal{A} \models \alpha_i[a_1, \dots, a_m]$ zu zeigen. Wir können dabei annehmen, dass für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ gilt: $\mathrm{frvar}(\alpha_j) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$.

In den Fällen (1) und (2) gilt offenbar $\mathcal{A} \models \alpha_i[a_1, \dots, a_n]$. Für den Fall (3) nehmen wir $\mathcal{A} \models \beta(x/t)[a_1, \dots, a_m]$ an. Für $a := t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m]$ gilt dann $\mathcal{A} \models \beta[a, a_1, \dots, a_m]$. Insbesondere gilt $\mathcal{A} \models \exists x \beta[a_1, \dots, a_m]$. Das zeigt
$$\mathcal{A} \models (\beta(x/t) \to \exists x \beta)[a_1, \dots, a_m].$$

In den Fällen (4) und (5) müssen wir auf die Induktionsannahme zurückgreifen. Danach gilt für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ und alle $b_1, \dots, b_m \in A$: $\mathcal{A} \models \alpha_j[b_1, \dots, b_m]$.

Angenommen, (4) trifft zu. Seien $k$ und $j$ wie in (4). Wegen $\mathcal{A} \models \alpha_j[a_1, \dots, a_m]$ und $\mathcal{A} \models (\alpha_j \to \alpha_i)[a_1, \dots, a_m]$ gilt auch $\mathcal{A} \models \alpha_i[a_1, \dots, a_m]$.

Angenommen, (5) trifft zu. Seien $\beta$, $\gamma$ und $j$ wie in (5). Nach Voraussetzung gilt
$$\mathcal{A} \models (\beta \to \gamma)[a_1, \dots, a_m].$$
Angenommen, es gilt $\mathcal{A} \models \exists x \beta[a_1, \dots, a_m]$. Wir müssen $\mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_m]$ zeigen.

Falls $x$ in $\beta$ nicht frei vorkommt, so gilt $\mathcal{A} \models \exists x\beta[a_1, \dots, a_m]$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models \beta[a_1, \dots, a_m]$ gilt. Wegen

$$\mathcal{A} \models (\beta \to \gamma)[a_1, \dots, a_m]$$

gilt in diesem Falle $\mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_m]$.

Falls $x$ in $\beta$ frei vorkommt, so auch in $\alpha_j = \beta \to \gamma$. Nach unserer Annahme ist $x$ damit unter $x_1, \dots, x_m$. Wir können $x = x_1$ annehmen. Wähle $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \beta[a, a_2, \dots, a_m]$. Nach Induktionsannahme gilt

$$\mathcal{A} \models (\beta \to \gamma)[a, a_2, \dots, a_m].$$

Damit gilt auch $\mathcal{A} \models \gamma[a, a_2, \dots, a_m]$. Da $x_1$ nach Voraussetzung in $\gamma$ nicht frei vorkommt, ist die Gültigkeit von $\gamma$ in $\mathcal{A}$ unabhängig von der Belegung von $x_1$. Damit gilt $\mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_m]$. $\square$

Bevor wir den Kalkül benutzen, um tatsächlich Formeln abzuleiten, treffen wir ein paar Feststellungen, die das Ableiten unter Umständen wesentlich vereinfachen.

**Lemma 3.34** (Tautologisches Schließen)**.** *Ist $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \to \beta$ prädikatenlogische Tautologie und $T$ Theorie mit $T \vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n$, so gilt $T \vdash \beta$.*

*Beweis.* Wir müssen einen Beweis von $\beta$ aus $T$ angeben. Wir benutzen

$$\alpha_1 \to \dots \to \alpha_n \to \beta$$

als Abkürzung für

$$\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \dots (\alpha_n \to \beta) \dots).$$

Man beachte, dass mit $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \to \beta$ auch $\alpha_1 \to \dots \to \alpha_n \to \beta$ prädikatenlogische Tautologie ist.

Sei nun $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ Beweis aus $T$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Wir verlängern diesen Beweis zu einem Beweis von $\beta$, und zwar wie folgt:

$\alpha_1 \to \dots \to \alpha_n \to \beta$ (Tautologie)
$\alpha_2 \to \dots \to \alpha_n \to \beta$ (Modus Ponens, geht wegen $\alpha_1 \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$)
...
$\beta$ (Modus Ponens, geht wegen $\alpha_n \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$)

$\square$

Für eine Formel $\alpha$ mit $\emptyset \vdash \alpha$ schreiben wir $\vdash \alpha$.

**Lemma 3.35.** *Für jede Formel $\alpha$ und jeden Term $t$ gilt:*

$$\vdash \forall x\alpha \to \alpha(x/t)$$

*Beweis.* Man erinnere sich daran, dass $\forall x\alpha \to \alpha(x/t)$ Abkürzung für $\neg\exists x\neg\alpha \to \alpha(x/t)$ ist. Wir geben einen Beweis dieser Formel an.

$\neg\alpha(x/t) \to \exists x\neg\alpha$ (Axiom)
$(\neg\alpha(x/t) \to \exists x\neg\alpha) \to (\neg\exists x\neg\alpha \to \alpha(x/t))$ (Tautologie)
$\neg\exists x\neg\alpha \to \alpha(x/t)$ (Modus Ponens)

$\square$

**Lemma 3.36.** *Für jede Theorie $T$ und jede Formel $\alpha$ gilt $T \vdash \alpha$ genau dann, wenn $T \vdash \forall x \alpha$ gilt.*

*Beweis.* Gelte $T \vdash \forall x \alpha$. Lemma 3.35 zusammen mit einer Anwendung von Modus Ponens liefert dann $T \vdash \alpha$.

Gelte $T \vdash \alpha$. Sei $\gamma$ irgendeine Aussage und $\perp$ Abkürzung für $\gamma \wedge \neg\gamma$.

Dann lautet ein Beweis von $\forall x \alpha$ aus $\alpha$ wie folgt:

$\alpha$
$\alpha \to (\neg\alpha \to \perp)$ (Tautologie)
$\neg\alpha \to \perp$ (Modus Ponens)
$\exists x \neg\alpha \to \perp$ (Existenzregel)
$(\exists x \neg\alpha \to \perp) \to \neg\exists x \neg\alpha$ (Tautologie)
$\neg\exists x \neg\alpha$ (Modus Ponens)

□

Nach diesen Vorbereitungen können wir unseren Kalkül benutzen, um tatsächlich mal etwas zu beweisen.

**Beispiel 3.37.** *Sei $\tau = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ das Vokabular der Gruppentheorie. Wir zeigen, dass aus den Axiomen der Gruppentheorie (geschrieben in dem Vokabular $\tau$) folgt, dass das neutrale Element einer Gruppe eindeutig bestimmt ist. Wir wollen also den Satz*

$$\forall x (\forall y\, y \cdot x \equiv y \to x \equiv e)$$

*ableiten.*

$\forall y\, y \cdot x \equiv y \to e \cdot x \equiv e$ *(Lemma 3.35)*
$\forall x (e \cdot x \equiv x \wedge x \cdot e \equiv x)$ *(Axiom der Gruppentheorie)*
$e \cdot x \equiv x \wedge x \cdot e \equiv x$ *(Lemma 3.36)*
$(e \cdot x \equiv x \wedge x \cdot e \equiv x) \to e \cdot x \equiv x$ *(prädikatenlogische Tautologie)*
$e \cdot x \equiv x$ *(Modus Ponens)*
$(x \equiv a \wedge a \equiv b) \to x \equiv b$ *(Axiom)*
$\forall a((x \equiv a \wedge a \equiv b) \to x \equiv b)$ *(Lemma 3.36)*
$\forall a((x \equiv a \wedge a \equiv b) \to x \equiv b) \to ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \to x \equiv b)$ *(3.35)*
$(x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \to x \equiv b$ *(Modus Ponens)*
$\forall b((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \to x \equiv b)$ *(Lemma 3.36)*
$\forall b((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \to x \equiv b) \to ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv e) \to x \equiv e)$ *(3.35)*
$(x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv e) \to x \equiv e$ *(Modus Ponens)*
$((\forall y\, y \cdot x \equiv y \to e \cdot x \equiv e) \wedge ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv e) \to x \equiv e) \wedge e \cdot x \equiv x)$
$\to (\forall y\, y \cdot x \equiv y \to x \equiv e)$ *(prädikatenlogische Tautologie)*
$\forall y\, y \cdot x \equiv y \to x \equiv e$ *(Lemma 3.34)*
$\forall x (\forall y\, y \cdot x \equiv y \to x \equiv e)$ *(Lemma 3.36)*

Wir beweisen noch zwei wichtige Tatsachen über unseren Kalkül.

**Satz 3.38** (Deduktionstheorem)**.** *Sei $\alpha$ Aussage, $\beta$ Formel und $T$ Theorie. Dann gilt*

$$T \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow T \vdash \alpha \to \beta.$$

*Beweis.* Gelte $T \vdash \alpha \to \beta$. Dann gilt auch $T \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$. Außerdem gilt $T \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$. Eine Anwendung von Modus Ponens liefert nun $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Gelte nun $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Sei $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ein Beweis von $\beta$ aus $T \cup \{\alpha\}$. Durch Induktion über $i \in \{1, \dots, n\}$ zeigen wir $T \vdash \alpha \to \beta_i$.

Sei also $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ gilt $T \vdash \alpha \to \beta_j$. Falls $T \vdash \beta_i$ gilt, so benutzen wir die Tautologie $\beta_i \to (\alpha \to \beta_i)$ und Modus Ponens, um $\alpha \to \beta_i$ aus $T$ abzuleiten.

Falls $\beta_i$ nicht aus $T$ ableitbar ist, so kann $\beta_i$ kein Axiom und kein Element von $T$ sein. Ist $\beta_i = \alpha$, so ist $\alpha \to \beta_i$ Tautologie und damit aus $T$ ableitbar. Es bleibt der Fall zu betrachten, dass $\beta_i$ durch Anwendung einer Regel aus einer Teilmenge von $\{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}\}$ hervorgeht.

Angenommen $\beta_i$ geht durch Modus Ponens aus einer Teilmenge von $\{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}\}$ hervor. Dann gibt es $j, k \in \{1, \dots, i-1\}$ mit $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. Nach Induktionsannahme gilt $T \vdash \alpha \to \beta_j$ und $T \vdash \alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$. Nun ist aber

$$((\alpha \to \beta_j) \wedge (\alpha \to (\beta_j \to \beta_i))) \to (\alpha \to \beta_i)$$

eine prädikatenlogische Tautologie. Nach Lemma 3.34 gilt demnach $T \vdash \alpha \to \beta_i$.

Angenommen, $\beta_i$ geht durch die Existenzregel aus einem $\beta_j$, $j < i$, hervor. Dann ist $\beta_j$ von der Form $\gamma \to \delta$ und $\beta_i = \exists x\gamma \to \delta$ für ein $x \in X$, das in $\delta$ nicht frei vorkommt.

Nach Induktionsannahme gilt $T \vdash \alpha \to (\gamma \to \delta)$. Die Formel

$$(\alpha \to (\gamma \to \delta)) \to (\gamma \to (\alpha \to \delta))$$

ist prädikatenlogische Tautologie. Eine Anwendung von Modus Ponens liefert $T \vdash \gamma \to (\alpha \to \delta)$. Da $\alpha$ Aussage ist, kommt $x$ in $\alpha \to \delta$ nicht frei vor. Die Existenzregel liefert nun $T \vdash \exists x\gamma \to (\alpha \to \delta)$. Wie oben folgt daraus $T \vdash \alpha \to (\exists x\gamma \to \delta)$, was noch zu zeigen war □

**Lemma 3.39.** *Seien $T$ eine Theorie und $\alpha$ eine Aussage über dem Vokabular $\tau$. Weiter sei $C'$ eine Menge neuer Konstanten, die in $\tau$ nicht vorkommen. Das Vokabular $\tau'$ entstehe aus $\tau$ durch hinzufügen der Konstanten in $C'$. Dann ist $\alpha$ genau dann über $\tau$ aus $T$ ableitbar, wenn $\alpha$ über $\tau'$ aus $T$ ableitbar ist. Dabei heißt $\alpha$* über *einem Vokabular $\sigma$* aus $T$ ableitbar*, wenn es einen Beweis von $\alpha$ aus $T$ gibt, der nur Formeln über $\sigma$ benutzt.*

*Beweis.* Offensichtlich ist ein Beweis von $\alpha$ aus $T$, der nur Formeln über $\tau$ benutzt, auch ein Beweis von $\alpha$ aus $T$ über $\tau'$.

Sei nun $b = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Beweis von $\alpha$ über $\tau'$. In $b$ kommen nur endlich viele der neuen Konstanten vor, zum Beispiel $c_1, \dots, c_k$. Wähle paarweise verschiedene Variablen $y_1, \dots, y_k$, die in $b$ nicht vorkommen.

Sei $b' = (\alpha_1', \dots, \alpha_n')$ die Folge von Formeln, die entsteht, wenn man für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ jedes Vorkommen von $c_i$ durch $y_i$ ersetzt. Es ist klar, dass in $b'$ nur Formeln über $\tau$ vorkommen. Außerdem gilt $\alpha_n' = \alpha_n = \alpha$, da in $\alpha$ keine der neuen Konstanten vorkommt. Wir zeigen, dass $b'$ Beweis von $\alpha$ aus $T$ ist, und zwar durch Induktion über $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ist $\alpha_i$ prädikatenlogische Tautologie, so auch $\alpha_i'$. Entsprechendes gilt, wenn $\alpha_i$ identitätslogisches Axiom ist. Ist $\alpha_i$ von der Form $\beta(x/t) \to \exists x\beta$, so ist auch $\alpha_i'$ Substitutionsaxiom.

Geht $\alpha_i$ durch Anwenden von Modus Ponens aus $\alpha_j$ und $\alpha_l$ hervor, so geht $\alpha_i'$ durch Anwenden von Modus Ponens aus $\alpha_j'$ und $\alpha_l'$ hervor. Geht $\alpha_i$ durch Anwenden der Existenzregel aus $\alpha_j$ hervor, so existieren Formeln $\beta$ und $\gamma$ und eine Variable $x$, die in $\gamma$ nicht frei vorkommt, so dass gilt: $\alpha_j = \beta \to \gamma$ und $\alpha_i = \exists x\beta \to \gamma$. Ersetzt man nun in $\alpha_j$ und $\alpha_i$ die $c_l$ durch die $y_l$ und erhält $\alpha_j' = \beta' \to \gamma'$ und $\alpha_i' = \exists x\beta' \to \gamma'$, so gilt, dass $x$ in $\gamma'$ nicht frei vorkommt, weil $x$ von den $y_l$ verschieden ist. Damit geht $\alpha_i'$ durch Anwenden der Existenzregel aus $\alpha_j'$ hervor. □

## 4. Mengenlehre

Wir hatten bereits die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre (ZF) als prädikatenlogische Formeln über dem Vokabular mit einem zweistelligen Relationssymbol $\varepsilon$ aufgeschrieben. Im Folgenden diskutieren wir die einzelnen Axiome inhaltlich. Zu den Axiomen von ZF kommt noch das Auswahlaxiom (AC) hinzu. Die Zermelo-Fraenkelschen Axiome zusammen mit dem Auswahlaxiom bilden die allgemein akzeptierte Grundlage der Mathematik (ZFC). Für die Elementrelation schreiben wir wie üblich $\in$.

4.1. **Klassen und Mengen; Nullmengen-, Aussonderungs- und Extensionalitätsaxiom.** Alle Objekte, die wir im Laufe des Kapitels über Mengenlehre „offiziell" betrachten werden, sind Mengen. Dabei werden wir niemals explizit definieren, was eine Menge ist. Wir werden aber die ZFC-Axiome benutzen, um zu zeigen, dass gewisse Mengen existieren (bzw. dass gewisse Objekte Mengen sind). Neben den Mengen gibt es noch *Klassen*. Eine Klasse ist ein Objekt der Form $C = \{x : E(x)\}$, wobei $E$ eine Eigenschaft von Mengen ist. Die Variable $x$ läuft dabei über alle Mengen.

Eine Klasse ist also eine Gesamtheit von Mengen, wobei das Kriterium für die Zugehörigkeit einer Menge zu einer Klasse eine nur von der Klasse abhängige Eigenschaft von Mengen ist. Damit braucht man Klassen im Grunde genommen nicht einführen, da man genauso gut von Eigenschaften von Mengen reden könnte. Der Klassenbegriff ist aber sehr angenehm für die Intuition. Es gibt auch Axiomatisierungen der Mengenlehre (z.B. NGB, die Mengenlehre von von Neumann, Gödel und Bernays), in der Klassen zulässige Objekte sind, die dann allerdings nicht selbst als Elemente von Klassen auftreten dürfen. Letzteres ist notwendig, damit die Russelsche Antinomie nicht zum Widerspruch führt.

Eine *Eigenschaft von Mengen* eine Eigenschaft, die sich als eine prädikatenlogische Formel über dem Vokabular der Mengenlehre hinschreiben lässt, wobei man endlich viele feste Mengen als Parameter benutzen darf. Ist also $\mathcal{M} = (M, \varepsilon^{\mathcal{M}})$ eine Struktur, $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ eine Formel und sind $a_1, \dots, a_n \in M$, so wird durch $\varphi$ und die Parameter $a_1, \dots, a_n$ die Klasse

$$\{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\}$$

definiert.

Es ist nützlich, gewisse Operationen und Relationen zwischen Klassen zu definieren.

**Definition 4.1.** Seien $C = \{x : E(x)\}$ und $D = \{x : F(x)\}$ Klassen. Dann ist $C$ eine *Teilklasse* von $D$ ($C \subseteq D$), falls für alle Mengen $x$ gilt: $E(x) \Rightarrow F(x)$. Die Klassen sind gleich ($C = D$), wenn $C \subseteq D$ und $D \subseteq C$ gelten, wenn also $C$ und $D$ dieselben Elemente haben. Das *Komplement* $-C$ ist die Klasse $\{x : \neg E(x)\}$. Die *Vereinigung* $C \cup D$ ist die Klasse $\{x : E(x) \vee F(x)\}$. Der *Durchschnitt* $C \cap D$ ist die Klasse $\{x : E(x) \wedge F(x)\}$. Die *Differenz* $C \setminus D$ ist die Klasse $\{x : E(x) \wedge \neg F(x)\}$.

Eine Menge $y$ identifizieren wir mit der Klasse $\{x : x \in y\}$. Eine Klasse ist eine *echte* Klasse, wenn sie keine Menge ist. Die *Allklasse* bzw. die *Klasse aller Mengen* ist die Klasse $V = \{x : x = x\}$.

Implizit wird in dieser Definition bereits gesagt, wann zwei Mengen gleich sind, nämlich wenn sie dieselben Elemente haben. Damit zwei Mengen immer dann gleich sind, wenn sie als Klassen gleich sind, muss man folgendes fordern:

**(Ext) Extensionalitätsaxiom.** Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Um zu garantieren, dass es überhaupt Mengen gibt, gibt es das

**(Null) Nullmengenaxiom.** Es gibt eine Menge, die keine Elemente hat.

Das Nullmengen Axiom hatten wir in Beispiel 3.22 nicht gefordert, weil es aus den anderen ZF-Axiomen ableitbar ist. Dazu benötigt man nur die Existenz irgendeiner Menge und das *Aussonderungsaxiom.* Dieses besagt, dass nicht nur der Durchschnitt zweier Mengen, sondern sogar der Durchschnitt einer Menge mit eine Klasse wieder eine Menge ist.

**(Aus) Aussonderungsaxiom.** Ist $E$ eine Eigenschaft von Mengen und $x$ eine Menge, so ist auch $\{y : y \in x \wedge y \text{ hat die Eigenschaft } E\}$ eine Menge.

Aus dem Aussonderungsaxiom folgt auch, dass die Differenz zweier Mengen wieder eine Menge ist.

**Definition und Lemma 4.2.** *Angenommen es gibt eine Menge $x$. Dann gibt es auch eine Menge, die keine Elemente hat. Diese Menge ist eindeutig bestimmt und heißt die* leere Menge. *Man bezeichnet sie mit $\emptyset$.*

*Beweis.* Sei $x$ eine Menge. Nach dem Aussonderungsaxiom ist auch $z := \{y \in x : y \neq y\}$ eine Menge. Offenbar hat $z$ keine Elemente. Sind $z$ und $z'$ Menge ohne Elemente, so gilt nach dem Extensionalitätsaxiom $z = z'$. □

4.2. **Paarmengen- und Vereinigungsaxiom.**

**Definition 4.3.** Für zwei Mengen $x$ und $y$ sei $\{x, y\}$ die Klasse $\{z : z = x \vee z = y\}$, das *ungeordnete Paar* von $x$ und $y$. Man schreibt $\{x\}$ für $\{x, x\}$.

**(Paar) Paarmengenaxiom.** Sind $x$ und $y$ Mengen, so ist auch $\{x, y\}$ eine Menge.

In der prädikatenlogischen Formalisierung des Paarmengenaxioms in Beispiel 3.22 hatten wir nur die Existenz einer Menge gefordert, die $x$ und $y$ als Elemente hat. Mit dem Aussonderungsaxiom erhält man daraus die exakte Menge $\{x, y\}$.

**Definition 4.4.** Für zwei Menge $x$ und $y$ sei $(x, y)$ die Klasse $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, das *geordnete Paar* von $x$ und $y$.

Man beachte, dass aus dem Paarmengenaxiom folgt, dass $(x, y)$ eine Menge ist. Das wesentliche an der Definition von geordneten Paaren ist, dass Lemma 4.5 gilt. Es gibt auch andere sinnvolle Möglichkeiten, geordnete Paare zu definieren.

**Lemma 4.5.** *Seien $a$, $b$, $x$ und $y$ Mengen. Dann gilt $(a, b) = (x, y)$ genau dann, wenn $a = x$ und $b = y$ gelten.*

Man kann nun auch geordnete Tripel definieren mittels $(x, y, z) := ((x, y), z)$. Analog kann man geordnete $n$-Tupel definieren durch $(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$. Es gilt dann

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n.$$

**Definition 4.6.** Sei $C$ eine Klasse. Wir definieren den *Durchschnitt* $\bigcap C$ und die *Vereinigung* $\bigcup C$ über $C$:

$$\bigcap C := \{x : \text{für jedes } c \in C \text{ ist } x \in c\}$$

$$\bigcup C := \{x : \text{es gibt ein } c \in C \text{ mit } x \in c\}$$

Ist $C \neq \emptyset$, so ist $\bigcap C$ eine Menge. Sei nämlich $c \in C$. Dann ist $\bigcap C = c \cap \bigcap C$, also Durchschnitt einer Menge mit einer Klasse. Nach dem Aussonderungsaxiom ist $\bigcap C$ also eine Menge. Ist $C = \emptyset$, so erhält man $\bigcap C = V$. $V$ ist nachdem Aussonderungsaxiom eine echte Klasse, da sonst mit $V$ auch $\{x : x \notin x\}$ eine Menge wäre.

Ist $C = \emptyset$, so ist $\bigcup C = \emptyset$, also eine Menge.

**(Ver) Vereinigungsaxiom.** Ist $x$ eine Menge, so auch $\bigcup x$.

Wieder genügt es wegen des Aussonderungsaxioms in der Formalisierung des Vereinigungsaxioms, die Existenz einer Obermenge von $\bigcup x$ zu fordern.

**Lemma 4.7.** *a) Sind $x$ und $y$ Mengen, so ist auch $x \cup y$ Menge.*

*b) Ist $a$ eine Menge, so ist $-a$ eine echte Klasse.*

*Beweis.* a) Nach dem Paarmengenaxiom ist $z = \{x, y\}$ eine Menge. Nach dem Vereinigungsaxiom ist $\bigcup z = x \cup y$ eine Menge.

b) Wäre $-a$ eine Menge, so auch $a \cup -a = V$, ein Widerspruch. □

4.3. **Relationen und Funktionen; Potenzmengen- und Ersetzungsaxiom.**

**Definition 4.8.** Für zwei Klassen $C$ und $D$ sei

$$C \times D := \{p : \text{es gibt } x \in C \text{ und } y \in D \text{ mit } p = (x, y)\}.$$

Kürzer schreibt man auch $C \times D = \{(x, y) : x \in C \wedge y \in D\}$. Analog definiert man

$$C \times D \times E := \{(x, y, z) : x \in C \wedge y \in D \wedge z \in E\}$$

und so weiter.

Eine Klasse $R$ heißt (*zweistellige*) *Relation*, falls alle Elemente von $R$ geordnete Paare sind, falls also $R \subseteq V \times V$ gilt. (Analog heißt $R$ *$n$-stellige Relation*, wenn alle Elemente von $R$ geordnete $n$-Tupel sind.)

Eine *Funktion* ist eine Relation $F$ für die gilt

$$\forall x, y, z((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \Rightarrow y = z).$$

Anstelle von $(x, y) \in F$ schreibt man dann $y = F(x)$. Analog kann man $n$-stellige Funktionen definieren als $n+1$-stellige Relationen $F$ mit

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y, z((x_1, \ldots, x_n, y) \in F \wedge (x_1, \ldots, x_n, z) \in F \Rightarrow y = z).$$

Wieder schreibt man $F(x_1, \ldots, x_n) = y$ anstelle von $(x_1, \ldots, x_n, y) \in F$.

**Definition 4.9.** Für Relationen $R$ und $S$ definieren wir

$S \circ R := \{(x, z) : \exists y((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$,

$R^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in R\}$,

$\operatorname{vb} R := \{x : \exists y((x, y) \in R)\}$ (*Vorbereich von $R$*),

$\operatorname{nb} R := \{y : \exists x((x, y) \in R)\}$ (*Nachbereich von $R$*) und

$\operatorname{fd} R := \operatorname{vb} R \cup \operatorname{nb} R$ (*Feld von $R$*).

Für eine Klasse $X$ sei $\mathrm{id}_X := \{(x, x) : x \in X\}$ die *Identität* auf $X$. Eine Funktion $F$ heißt *injektiv*, falls für alle $x, y \in \operatorname{vb} F$ gilt:

$$F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$$

**Lemma 4.10.** *a) Für beliebige Relationen $R$, $S$ und $T$ gilt*

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

*sowie*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

*b) Sind $F$ und $G$ Funktionen, so ist auch $F \circ G$ eine Funktion.*

*c) Sei $F$ eine Funktion und $X = \operatorname{vb} F$. Dann ist $F^{-1}$ genau eine Funktion, wenn $F$ injektiv ist. In diesem Falle gilt $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_X$.*

*d) Sind $F$ und $G$ Funktionen und ist $x$ eine Menge mit $x \in \operatorname{vb} F$ und $F(x) \in \operatorname{vb} G$, so ist $x \in \operatorname{vb}(G \circ F)$ und es gilt $(G \circ F)(x) = G(F(x))$.*

**Definition 4.11.** Sei $R$ eine Relation und $A$ eine Klasse. Dann ist

$$R[A] := \{y : \exists x(x \in A \wedge (x,y) \in R)\}$$

das *Bild* von $A$ unter $R$.

Sei $F$ eine Funktion und $I = \operatorname{vb} F$. Dann schreibt man anstelle von $F = \{(i, F(i)) : i \in I\}$ auch $(F(i))_{i\in I}$ oder $(F_i)_{i\in I}$. Letzteres ist die *Familienschreibweise.*

**Lemma 4.12.** *Seien $R$ und $S$ Relationen, $F$ Funktion und $A$, $B$ und $X$ Klassen.*
*a)* $(S \circ R)[A] = S[R[A]]$
*b)* $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$
*c)* $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$ *(Im allgemeinen gilt die Gleichheit nur für injektive Funktionen)*
*d)* $F[A] = \{F(x) : x \in (\operatorname{vb} F \cap A)\}$, $F^{-1}[A] = \{x : x \in \operatorname{vb} F \wedge F(x) \in A\}$
*e)* $F^{-1}[A \cup B] = F^{-1}[A] \cup F^{-1}[B]$, $F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$,
$F^{-1}[X \setminus A] = F^{-1}[X] \setminus F^{-1}[A]$

**Definition 4.13.** Sei $F$ eine Funktion, $A$ und $B$ Klassen. Wir schreiben
$F : A \xrightarrow{aus} B$, falls $\operatorname{vb} F \subseteq A$ und $\operatorname{nb} F \subseteq B$,
$F : A \to B$, falls $\operatorname{vb} F = A$ und $\operatorname{nb} F \subseteq B$,
$F : A \twoheadrightarrow B$, falls $\operatorname{vb} F = A$ und $\operatorname{nb} F = B$,
$F : A \hookrightarrow B$, falls $\operatorname{vb} F = A$, $\operatorname{nb} F \subseteq B$ und $F$ injektiv ist,
$F : A \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow B$, falls $\operatorname{vb} F = A$, $\operatorname{nb} F = B$ und $F$ bijektiv ist.

Einige der Fragen, wann gewisse mit Relationen und Funktionen zusammenhängende Klassen Mengen sind, können wir bereits beantworten. Andere Fragen werden durch Axiome beantwortet, die wir noch einführen werden.

**Lemma 4.14.** *Sei $R$ eine Relation, die Menge ist. Dann sind auch* $\operatorname{vb} R$, $\operatorname{nb} R$ *und* $\operatorname{fd} R$ *Mengen. Ist $A$ eine Klasse, so ist $R[A]$ eine Menge.*

*Beweis.* Die Elemente von $R$ haben die Form $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$ mit $x \in \operatorname{vb} R$ und $y \in \operatorname{nb} R$. Daher gilt

$$\bigcup R = \{\{x\} : x \in \operatorname{vb} R\} \cup \{\{x,y\} : (x,y) \in R\}.$$

Es folgt

$$\bigcup\bigcup R = \{x : x \in \operatorname{vb} R\} \cup \{y : y \in \operatorname{nb} R\} = \operatorname{vb} R \cup \operatorname{nb} R = \operatorname{fd} R.$$

Nach dem Vereinigungsaxiom sind $\bigcup R$ und $\bigcup\bigcup R$ Mengen. Damit ist $\operatorname{fd} R$ eine Menge. Wegen $\operatorname{vb} R, \operatorname{nb} R, R[A] \subseteq \operatorname{fd} R$ folgt aus dem Aussonderungsaxiom, dass $\operatorname{vb} R$, $\operatorname{nb} R$ und $R[A]$ Mengen sind. □

**Definition 4.15.** Für eine Klasse $C$ sei

$$\mathcal{P}(C) := \{x : x \subseteq C\}$$

die *Potenzklasse* von $C$.

**(Pot) Potenzmengenaxiom.** Ist $x$ eine Menge, so auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$.

Wieder genügt es in der Formalisierung des Potenzmengenaxioms, die Existenz einer Obermenge von $\mathcal{P}(x)$ zu fordern.

**Lemma 4.16.** *a) Sind $a$ und $b$ Mengen, so ist auch $a \times b$ Menge.*
*b) Ist $R$ eine Relation und sind* $\operatorname{vb} R$ *und* $\operatorname{nb} R$ *Mengen, so ist $R$ Menge.*
*c) Ist $F : a \to b$ eine Funktion und sind $a$ und $b$ Mengen, so ist auch $F$ Menge.*

*Beweis.* a) Mit $a$ und $b$ ist auch $a \cup b$ Menge. Nach (Pot) sind auch $\mathcal{P}(a \cup b)$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ Mengen. Nach (Aus) genügt es, $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ zu zeigen. Sei $(x, y) \in a \times b$, also $x \in a$ und $y \in b$. Dann gilt

$$\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$$

und

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)).$$

b) Es gilt $R \subseteq \operatorname{vb} R \times \operatorname{nb} R$. Damit ist $R$ Menge nach (Aus).

c) $F \subseteq a \times b$ ist Menge nach a) und (Aus). □

**Definition 4.17.** Für Mengen $a$ und $b$ sei

$${}^a b := \{f : f \text{ ist Funktion von } a \text{ nach } b\}.$$

Oft schreibt man für ${}^a b$ auch einfach $b^a$.

**Lemma 4.18.** *Sind $a$ und $b$ Mengen, so ist auch ${}^a b$ eine Menge.*

*Beweis.* Sei $f \in {}^a b$, also $f : a \to b$. Dann ist $f \subseteq a \times b$, also $f \in \mathcal{P}(a \times b)$.

Insgesamt ist ${}^a b \subseteq \mathcal{P}(a \times b)$ und damit Menge. □

Wir haben schon gesehen, dass für jede Klasse $A$ und jede Relation $R$, die Menge ist, auch $R[A]$ eine Menge ist. Ist die Relation $R$ eine Klasse und $a$ eine Menge, so ist $R[a]$ im Allgemeinen keine Menge. Betrachte zum Beispiel die Relation $R = V \times V$. Falls $a$ nicht leer ist, so ist $R[a] = V$, also eine echte Klasse.

Ist $F$ eine Funktion, so fordert man axiomatisch, dass $F[x]$ eine Menge ist, falls $x$ Menge ist.

**(Ers) Ersetzungsaxiom.** Ist $x$ eine Menge und $F$ eine Funktion, so ist $F[x]$ eine Menge.

In den meisten Anwendungen des Funktionenbegriffs in der Mathematik kommt man ohne das Ersetzungsaxiom aus, da man im Allgemeinen zu einer Funktion $F$ auch zwei Mengen $a$ und $b$ mit $F \subseteq a \times b$ gegeben hat. In diesem Falle ist für jede Menge $x$ die Klasse $F[x] \subseteq b$ Menge nach (Aus).

Man braucht das Ersetzungsaxiom nur für Funktionen $F : A \to B$, bei denen man nicht weiß, ob $B$ eine Menge ist.

**Lemma 4.19.** *Sei $F$ eine Funktion und $a$ eine Menge mit $\operatorname{vb} F \subseteq a$. Dann ist $F$ Menge.*

*Beweis.* $\operatorname{nb} F = F[\operatorname{vb} F] = F[a]$ ist eine Menge nach (Ers). Also ist $a \times \operatorname{nb} F$ eine Menge. Damit ist $F \subseteq a \times \operatorname{nb} F$ eine Menge nach (Aus). □

**Definition 4.20.** Für eine Funktion $F$ und eine Klasse $A$ sei

$$F \restriction A = \{(x, y) : (x, y) \in F \wedge x \in A\}$$

die *Einschränkung* von $F$ auf $A$.

Man beachte, dass die Einschränkung einer Funktion auf eine Menge nach Lemma 4.19 eine Menge ist.

4.4. **Eigenschaften von Relationen.** Für eine Relation $R$ schreiben wir anstelle von $(x, y) \in R$ auch $xRy$. Statt $R$ benutzen wir auch, je nach Zusammenhang, die Symbole $<$, $\leq$, $\sim$ usw.

**Definition 4.21.** Sei $R$ eine Relation und $X$ eine Klasse. $R$ heißt Relation *auf* $X$, falls $R \subseteq X \times X$ gilt.

$R$ heißt *reflexiv* auf $X$, falls $xRx$ für alle $x \in X$ gilt. (D.h., falls $\mathrm{id}_X \subseteq R$ gilt.)

$R$ heißt *irreflexiv* auf $X$, falls $xRx$ für kein $x \in X$ gilt. (D.h., falls $R \cap \mathrm{id}_X = \emptyset$ gilt.)

$R$ heißt *symmetrisch*, falls für alle $x$ und $y$ gilt:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad yRx$$

$R$ heißt *antisymmetrisch*, falls für alle $x$ und $y$ gilt:

$$xRy \land yRx \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$R$ heißt *transitiv*, falls für alle $x$, $y$ und $z$ gilt:

$$xRy \land yRz \quad \Rightarrow \quad xRz$$

**Definition 4.22.** Eine Relation $\sim$ auf einer Klasse $X$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn $\sim$ auf $X$ transitiv, reflexiv und symmetrisch ist. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$, so sei für jedes $x \in X$

$$\overline{x} := \{y \in X : x \sim y\}$$

*Äquivalenzklasse* von $x$ bzgl. $\sim$.

**Definition 4.23.** Eine Klasse $P$ heißt *Partition* einer Klasse $X$, wenn folgendes gilt:

(1) $P \subseteq \mathcal{P}(X)$, d.h., die Elemente von $P$ sind Teilmengen von $X$.
(2) Die Elemente von $P$ sind nicht leer.
(3) Die Elemente von $P$ sind paarweise disjunkt.
(4) $X = \bigcup P$

Jedes $x \in X$ ist also Element von genau einem $a \in P$.

**Lemma 4.24.** *Ist $X$ eine Klasse und $R$ eine Äquivalenzrelation auf $X$, so ist jedes $x \in X$ in genau einer Äquivalenzklasse enthalten. Sind also alle Äquivalenzklassen Mengen, so bilden die Äquivalenzklassen eine Partition von $X$.*

*Ist umgekehrt $P$ eine Partition von $X$, so ist*

$$R = \{(x, y) : \exists p \in P(x \in p \land y \in p)\}$$

*eine Äquivalenzrelation auf $X$, für die jede Äquivalenzklasse eine Menge ist.*

*Damit entsprechen die Äquivalenzrelationen auf $X$, deren Äquivalenzklassen Mengen sind, genau den Partitionen von $X$.*

Man beachte, dass es naheliegende Äquivalenzrelationen gibt, bei denen die Äquivalenzklassen keine Mengen sind, zum Beispiel die Isomorphie von Gruppen. Es gibt eine echte Klasse von einelementigen Gruppen, die natürlich alle isomorph sind.

**Definition 4.25.** Eine Relation $<$ auf einer Klasse $X$ heißt *Halbordnung*, falls $<$ auf $X$ irreflexiv und transitiv ist. Für $x, y \in X$ setzt man

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \lor x = y.$$

Ist $<$ Halbordnung auf $X$, so nennt man $(X, <)$, bzw. $X$, falls klar klar ist, welche Relation auf $X$ betrachtet wird, eine *halbgeordnete Klasse*.

An dieser Stelle ist nicht vollkommen klar, was mit $(X, <)$ gemeint ist, wenn $X$ oder $<$ eine echte Klasse ist. Um dieses Problem zu beheben, kann man Paare von Klassen einführen. Für zwei Klassen $(C, D)$ sei

$$(C, D) := C \times \{0\} \cup D \times \{1\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass durch das Paar $(C, D)$ die Komponenten $C$ und $D$ eindeutig bestimmt sind. Da wir Mengen immer mit kleinen Buchstaben bezeichnen und Klassen, von denen wir nicht wissen, ob sie Mengen sind, mit großen, ist es im folgenden immer klar ersichtlich, wenn wir von einem Paar von Klassen sprechen und nicht von einem Paar von Mengen. Mit $(X, <)$ ist ein Paar von Klassen gemeint.

**Übung 4.1.** *Zeige: Ist $<$ eine irreflexive und transitive Relation auf einer Klasse $X$, so ist $\leq := < \cup \mathrm{id}_X$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch auf $X$.*

*Ist $\leq$ eine transitive und antisymmetrische Relation auf $X$, so ist $\leq \setminus \mathrm{id}_X$ transitiv und irreflexiv auf $X$.*

Gemäß dieser Übung sind Relationen, die transitiv und irreflexiv sind, in einem gewissen Sinne mit Relationen austauschbar, die transitiv, reflexiv und antisymmetrisch sind. Daher nennt man auch eine transitive, reflexive, antisymmetrische Relation $\leq$ Halbordnung.

**Definition 4.26.** $(X, <)$ heißt *total geordnete* Klasse (und $<$ eine *totale* oder *lineare Ordnung* auf $X$), wenn $\leq$ Halbordnung auf $X$ ist und für alle $x, y \in X$ gilt:

$$x = y \quad \vee \quad x < y \quad \vee \quad y < x$$

Man beachte, dass sich die drei Fälle ausschließen.

**Definition 4.27.** Sei $(X, <)$ eine halbgeordnete Klasse, $M \subseteq X$ und $a \in X$. Dann ist $a$ *maximal* (*minimal*) in $M$, wenn $a \in M$ ist und es kein $b \in M$ gibt, für das $a < b$ ($b < a$) gilt.

$a$ ist das *größte* (*kleinste*) Element von $M$, falls $a \in M$ ist und für alle $b \in M$ gilt: $b \leq a$ ($a \leq b$).

$a$ ist *obere* (*untere*) *Schranke* von $M$, wenn für alle $b \in M$ gilt: $b \leq a$ ($a \leq b$).

$a$ ist das *Supremum* (*Infimum*) von $M$, falls $a$ die kleinste obere (größte untere) Schranke von $M$ ist.

**Definition 4.28.** Seien $(X, <)$ und $(X, <)$ halbgeordnete Klassen. (Wir verzichten darauf, die Relationen auf $X$ und $Y$ typographisch zu unterscheiden.) Weiter sei $F : X \xrightarrow{aus} Y$. $F$ heißt *monoton*, falls für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt: $F(x) \leq F(x')$.

$F$ heißt *streng monoton*, falls für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt: $F(x) < F(x')$.

$F$ heißt *Isomorphismus*, falls $F : X \twoheadrightarrow Y$ gilt und $F$ und $F^{-1}$ beide streng monoton sind. Wir schreiben $F : (X, <) \xrightarrow{\cong} (Y, <)$ bzw. $F : X \xrightarrow{\cong} Y$.

$(X, <)$ und $(Y, <)$ heißen *isomorph*, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert. In diesem Falle schreiben wir $(X, <) \cong (Y, <)$.

**Lemma 4.29.** *Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ total geordnete Klassen und $F : X \xrightarrow{aus} Y$ streng monoton. Dann ist $F$ injektiv und $F^{-1}$ streng monoton.*

### 4.5. **Wohlordnungen.**

**Definition 4.30.** Sei $X$ eine Klasse und $<$ Relation auf $X$. $(X, <)$ heißt *wohlgeordnete* Klasse (und $<$ eine Wohlordnung auf $X$), falls gilt:

(1) $(X, <)$ ist linear geordnet.
(2) Für jedes $x \in X$ ist $_{<}x := \{y \in X : y < x\}$ eine Menge.
(3) Jede nichtleere Teilmenge $a$ von $X$ hat ein minimales Element (das mit $\min a$ bezeichnet wird).

In den meisten Fällen, die uns interessieren, ist $X$ eine Menge und Bedingung (2) damit unwichtig.

Ist $X$ durch $<$ wohlgeordnet und $C \subseteq X$, so wird $C$ durch

$$< \restriction C := \{(x, y) : x, y \in C \wedge x < y\}$$

wohlgeordnet. Statt $< \restriction C$ oder $< \cap (C \times C)$ schreiben wir oft einfach $<$ und sagen: $(C, <)$ ist wohlgeordnet.

**Lemma 4.31.** *Sei $(X, <)$ wohlgeordnete Klasse und $C \subseteq X$ eine nichtleere Klasse. Dann hat $C$ ein minimales Element $\min C$.*

*Beweis.* Wegen $C \neq \emptyset$ gibt es ein Element $c \in C$. Ist $c$ minimal in $C$, so sind wir fertig. Ist $c$ nicht minimal, so ist $a := \{x \in C : x < c\} \subseteq {}_{<}c$ eine nichtleere Menge. Wie man leicht nachrechnet, ist ein minimales Element von $a$ auch minimales Element von $C$. □

Zur Veranschaulichung von Wohlordnungen machen wir einige Bemerkungen. Sei $(X, <)$ wohlgeordnet.

Falls $X$ nicht leer ist, so hat $X$ nach Lemma 4.31 ein minimales Element. $X$ braucht aber kein größtes Element zu haben, wie das Beispiel $(\mathbb{N}, <)$ zeigt. Es hat also im Allgemeinen auch nicht jede Teilmenge bzw. Teilklasse von $X$ eine obere Schranke. Ist aber $a \subseteq X$ eine Menge, die eine obere Schranke hat, so hat $a$ auch ein Supremum, nämlich

$$\min\{s \in X : s \text{ ist obere Schranke von } a\}.$$

Ist $x \in X$ nicht größtes Element von $X$, so hat $x$ einen unmittelbaren Nachfolger $x'$, nämlich $\min\{y \in X : x < y\}$. Es hat aber nicht jedes Element von $X$, das nicht das kleinste ist, einen unmittelbaren Vorgänger. Ein Element $x \in X$, welches weder das kleinste Element von $X$ ist noch einen unmittelbaren Vorgänger hat, heißt Limespunkt von $X$. Ist $x$ Limespunkt von $X$, so gilt für alle $z \in X$:

$$z < x \quad \Rightarrow \quad z' < x$$

**Lemma 4.32.** *Sei $(X, <)$ wohlgeordnet und $F : X \to X$ streng monoton. Dann gilt für alle $x \in X$: $x \leq F(x)$.*

*Beweis.* Angenommen nicht. Dann existiert ein $x \in X$ mit $F(x) < x$. Da $<$ Wohlordnung ist, existiert ein $x$, das minimal mit dieser Eigenschaft ist. Setze $y := F(x)$. Es gilt also $y = F(x) < x$. Die strenge Monotonie von $F$ liefert $F(y) < F(x) = y$. Nun gilt aber $y < x$. Damit war $x$ nicht minimal mit $F(x) < x$. Ein Widerspruch. □

**Korollar 4.33.** *Sei $(X, <)$ wohlgeordnet. Dann ist $\mathrm{id}_X$ der einzige Isomorphismus von $(X, <)$ nach $(X, <)$.*

*Beweis.* Sei $F : X \to X$ ein Isomorphismus. Dann ist $F$ streng monoton. Nach Lemma 4.32 gilt also für alle $x \in X$: $x \leq F(x)$. Da auch $F^{-1}$ streng monoton ist, gilt für alle $x \in X$: $F(x) \leq F^{-1}(F(x)) = x$. Damit ist $F = \mathrm{id}_X$. □

**Korollar 4.34.** *Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ wohlgeordnet. Wenn $X$ und $Y$ isomorph sind, dann ist der Isomorphismus zwischen $X$ und $Y$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Seien $F : X \to Y$ und $G : X \to Y$ Isomorphismen. Dann ist

$$G^{-1} \circ F : X \to X$$

ein Isomorphismus. Nach Lemma 4.33 ist $G^{-1} \circ F = \mathrm{id}_X$. Damit ist $G = F$. □

**Definition 4.35.** Sei $(X, <)$ wohlgeordnet. Ein *Anfangsstück* von $X$ ist eine Klasse $C \subseteq X$ mit

$$\forall c \in C \forall x \in X (x \leq c \Rightarrow x \in C).$$

$C$ ist *echtes* Anfangsstück von $X$, falls $C \neq X$ ist.

Ist $C$ echtes Anfangsstück von $X$, so sei $y := \min\{x \in X : x \notin C\}$. Wie man leicht sieht ist $C = {}_{<}y$, also Menge.

**Korollar 4.36.** *Eine wohlgeordnete Klasse $(X, <)$ ist zu keinem echten Anfangsstück von $X$ isomorph.*

*Beweis.* Sei $C$ ein echtes Anfangsstück von $X$. Angenommen, es gibt einen Isomorphismus $F : X \to C$. $C$ ist von der Form ${}_{<}y$ für ein $y \in X$. Offenbar ist $F(y) \in C$. Damit gilt $F(y) < y$, im Widerspruch zu Lemma 4.32. □

**Satz 4.37.** *Seien $(X,<)$ und $(Y,<)$ wohlgeordnete Klassen. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(1) *$(X,<)$ ist zu $(Y,<)$ isomorph.*
(2) *$(X,<)$ ist zu einem echten Anfangsstück von $(Y,<)$ isomorph.*
(3) *$(Y,<)$ ist zu einem echten Anfangsstück von $(X,<)$ isomorph.*

*Beweis.* Nach Korollar 4.36 schließen sich die drei Fälle gegenseitig aus.

Wir setzen

$$F := \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y \wedge ({}_<x,<) \cong ({}_<y,<)\}.$$

Nach Korollar 4.36 gibt es zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in F$. $F$ ist also Funktion:

$$F : X \xrightarrow{aus} Y$$

Aus Symmetriegründen gibt es zu jedem $y \in Y$ auch höchstens ein $x \in X$ mit $(x,y) \in F$. $F$ ist also injektiv.

Außerdem ist $\mathrm{vb}\,F$ ein Anfangsstück von $X$. Sei nämlich $x \in \mathrm{vb}\,F$, $F(x) = y$ und $x_1 < x$ für ein $x_1 \in X$. Wegen $F(x) = y$ existiert ein Isomorphismus $f : {}_<x \to {}_<y$. Wegen $x_1 \in {}_<x$ kann man $y_1 := f(x_1)$ definieren. Damit gilt $y_1 \in {}_<y$, also $y_1 < y$. Nun ist $f \restriction {}_<x_1$ Isomorphismus zwischen ${}_<x_1$ und ${}_<y_1$. Nach Definition von $F$ gilt also $F(x_1) = y_1$ und damit $x_1 \in \mathrm{vb}\,F$. Das zeigt, dass $\mathrm{vb}\,F$ ein Anfangsstück von $X$ ist. Aus Symmetriegründen ist $\mathrm{nb}\,F$ ein Anfangsstück von $Y$.

Schließlich zeigt diese Betrachtung, dass $F$ und $F^{-1}$ streng monoton sind. Damit ist $F$ ein Isomorphismus zwischen $\mathrm{vb}\,F$ und $\mathrm{nb}\,F$.

Angenommen, $\mathrm{vb}\,F$ ist echtes Anfangsstück von $X$ und $\mathrm{nb}\,F$ von $Y$. Dann gibt es $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\mathrm{vb}\,F = {}_<x$ und $\mathrm{nb}\,F = {}_<y$. Insbesondere ist ${}_<x \cong {}_<y$ und damit $(x,y) \in F$. Ein Widerspruch.

Es bleiben also folgende Fälle übrig:

(1) $\mathrm{vb}\,F = X$ und $\mathrm{nb}\,F = Y$.
(2) $\mathrm{vb}\,F = X$ und $\mathrm{nb}\,F$ ist echtes Anfangsstück von $Y$.
(3) $\mathrm{vb}\,F$ ist echtes Anfangsstück von $X$ und $\mathrm{nb}\,F = Y$.

Das zeigt den Satz. □

**Übung 4.2.** *Zeige, dass je zwei wohlgeordnete echte Klassen isomorph sind.*

4.6. **Induktive Beweise und rekursive Definitionen.** Ähnlich wie bei den natürlichen Zahlen kann man auf wohlgeordneten Klassen induktive Beweise führen und Funktionen rekursiv definieren.

**Satz 4.38.** *Sei $(X,<)$ wohlgeordnete Klasse und $E$ eine Eigenschaft von Mengen. Für alle $x \in X$ gelte:*

($*$) *Haben alle $y < x$ die Eigenschaft $E$, so auch $x$.*

*Dann haben alle Elemente von $X$ die Eigenschaft $E$.*

*Beweis.* Setze

$$C := \{x \in X : x \text{ hat nicht die Eigenschaft } E\}.$$

Angenommen, $C \neq \emptyset$. Sei $x := \min C$. Nach ($*$) müsste $x$ die Eigenschaft $E$ haben. Ein Widerspruch. □

Häufig wird auch die folgende Variante von Satz 4.38 benutzt:

**Satz 4.39.** *Sei $(X,<)$ eine wohlgeordnete Klasse und $E$ eine Eigenschaft von Mengen. Es gelte:*

(1) *Das kleinste Element von $X$ hat die Eigenschaft $E$.*
(2) *Hat $x \in X$ die Eigenschaft $E$ und ist $x$ nicht das größte Element von $X$, so hat auch der Nachfolger $x'$ von $x$ die Eigenschaft $E$.*

(3) *Ist $x \in X$ Limespunkt und haben alle $y < x$ die Eigenschaft $E$, so hat auch $x$ die Eigenschaft $E$.*

*Dann haben alle Elemente von $X$ die Eigenschaft $E$.*

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 4.38 sei

$$C := \{x \in X : x \text{ hat nicht die Eigenschaft } E\}.$$

Angenommen $C \neq \emptyset$. Sei $x := \min C$. Wegen (1) kann $x$ nicht das kleinste Element von $X$ sein. Wegen (2) kann $x$ nicht Nachfolger eines Elementes von $X$ sein. Nach (3) kann $x$ auch kein Limespunkt von $X$ sein. Ein Widerspruch. □

Als nächstes beweisen wir den sogenannten Rekursionssatz, der besagt, dass man auf Wohlordnungen Funktionen rekursiv definieren kann.

**Satz 4.40** (Rekursionssatz)**.** *Sei $(X, <)$ eine wohlgeordnete Klasse. Weiter sei $G : V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F : X \to V$, so dass für jedes $x \in X$ gilt:*

$$F(x) = G(F \restriction {<}x)$$

*$G$ ist dabei zu verstehen als die Rekursionsvorschrift, die $F$ definiert.*

Bevor wir den Rekursionssatz beweisen, machen wir ein paar Bemerkungen über Vereinigungen von Funktionen und Relationen. Sei $F$ eine Funktion und $G \subseteq F$. Dann ist auch $G$ eine Funktion. Man sagt, $F$ ist eine *Fortsetzung* von $G$.

Sei $\mathcal{R}$ eine Klasse, deren Elemente Relationen sind. Dann ist auch $\bigcup \mathcal{R}$ eine Relation und es gilt

$$\operatorname{vb}(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup \{\operatorname{vb} r : r \in \mathcal{R}\}$$

sowie

$$\operatorname{nb}(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup \{\operatorname{nb} r : r \in \mathcal{R}\}$$

Ist $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen, so ist $\bigcup \mathcal{F}$ im Allgemeinen keine Funktion.

**Lemma 4.41.** *Sei $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen. $\bigcup \mathcal{F}$ ist genau dann eine Funktion, wenn die Elemente von $\mathcal{F}$ paarweise* verträglich *sind, d.h., wenn für je zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{F}$ und alle $x \in \operatorname{vb} f \cap \operatorname{vb} g$ gilt: $f(x) = g(x)$.*

*Beweis.* Angenommen, $\bigcup \mathcal{F}$ ist eine Funktion. Seien $f, g \in \mathcal{F}$. Ist $x \in \operatorname{vb} f \cap \operatorname{vb} g$, so ist $x \in \operatorname{vb}(\bigcup \mathcal{F})$. Es gilt $f(x) = (\bigcup \mathcal{F})(x) = g(x)$. Damit sind $f$ und $g$ verträglich.

Seien nun die Elemente von $\mathcal{F}$ paarweise verträglich. Wir zeigen, dass $\bigcup \mathcal{F}$ eine Funktion ist. Seien $(x, y), (x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$. Dann existieren $f, g \in \mathcal{F}$ mit $f(x) = y$ und $g(x) = z$. Da $f$ und $g$ verträglich sind, gilt $y = z$. Das zeigt, dass $\bigcup \mathcal{F}$ eine Funktion ist. □

*Beweis des Rekursionssatzes.* Sei

$$\mathcal{F} := \{f : X \xrightarrow{aus} V : f \text{ ist Menge, } \operatorname{vb} f \text{ ist Anfangsstück von } X \text{ und}$$
$$\text{für alle } x \in \operatorname{vb} f \text{ gilt } f(x) = G(f \restriction {<}x)\}.$$

Wenn $X$ nicht leer ist, so ist auch $\mathcal{F}$ nicht leer. Sei nämlich $x := \min X$. Dann ist $\{(x, G(\emptyset))\} \in \mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass je zwei Elemente von $\mathcal{F}$ verträglich sind. Seien $f, g \in \mathcal{F}$. Angenommen $f$ und $g$ sind nicht verträglich. Sei $x \in (\operatorname{vb} f) \cap (\operatorname{vb} g)$ minimal mit $f(x) \neq g(x)$. Nach Wahl von $x$ gilt $f \restriction {<}x = g \restriction {<}x$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ ist

$$f(x) = G(f \restriction {<}x) = G(g \restriction {<}x) = g(x).$$

Ein Widerspruch zur Wahl von $x$.

Damit ist $F := \bigcup \mathcal{F} : X \xrightarrow{aus} V$ eine Funktion. Wegen

$$\operatorname{vb} F = \bigcup \{\operatorname{vb} f : f \in \mathcal{F}\}$$

ist $\operatorname{vb} F$ eine Vereinigung von Anfangsstücken von $X$. Wie man leicht sieht, ist $\operatorname{vb} F$ damit selbst ein Anfangsstück von $X$.

Als nächstes zeigen wir, dass für alle $x \in \operatorname{vb} F$ gilt:

$$F(x) = G(F \restriction {}_{<}x).$$

Sei $x \in \operatorname{vb} F$. Dann existiert $f \in \mathcal{F}$ mit $x \in \operatorname{vb} f$. Wegen $f \subseteq F$ und da $\operatorname{vb} f$ und $\operatorname{vb} F$ Anfangsstücke von $X$ sind, gilt $f \restriction {}_{<}x = F \restriction {}_{<}x$. Wegen $f \in \mathcal{F}$ gilt $F(x) = f(x) = G(f \restriction {}_{<}x) = G(F \restriction {}_{<}x)$.

Weiter müssen wir zeigen, dass $\operatorname{vb} F = X$ gilt. Dazu zeigen wir induktiv für alle $x \in X$: $x \in \operatorname{vb} F$. Sei $x \in X$ und für alle $y < x$ gelte $y \in \operatorname{vb} F$. Dann ist ${}_{<}x \subseteq \operatorname{vb} F$. Da ${}_{<}x$ eine Menge ist, ist auch $f := F \restriction {}_{<}x$ eine Menge. Nachdem was wir bereits über $F$ wissen, gilt $f \in \mathcal{F}$. Wie man leicht sieht, ist auch $g := f \cup \{(x, G(f)\}$ ein Element von $\mathcal{F}$. (Man beachte, dass $f \restriction {}_{<}x = f$ gilt.) Damit ist $x \in \operatorname{vb} F$.

Das zeigt die Existenz einer Funktion $F : X \to V$ mit den gewünschten Eigenschaft. Sei $F'$ eine weitere solche Funktion. Wir zeigen $F = F'$.

Sei $x \in X$. Setze $a := {}_{<}x \cup \{x\}$. Wie man leicht sieht, ist $a$ Anfangsstück von $X$ und Menge. Setze $f := F \restriction a$ und $f' := F' \restriction a$. Wegen der Eigenschaften von $F$ und $F'$ sind $f$ und $f'$ Elemente von $\mathcal{F}$ und als solche verträglich. Damit gilt

$$F(x) = f(x) = f'(x) = F'(x).$$

□

Analog zu Satz 4.39 gibt es auch eine Version des Rekursionssatzes, in der Limesschritt und Nachfolgerschritt getrennt sind.

**Satz 4.42.** *Sei $(X, <)$ wohlgeordnete Klasse. $H$ und $K$ seien Funktionen von $V$ nach $V$. $a$ sei eine Menge. Dann gibt es genau eine Funktion $F : X \to V$, so dass für jedes $x \in X$ gilt:*

$$(**) \quad F(x) = \begin{cases} a, & \text{falls } x \text{ das kleinste Element von } X \text{ ist,} \\ H(F(y)), & \text{falls } y \in X \text{ und } x = y' \text{ gilt,} \\ K(F \restriction {}_{<}x), & \text{falls } x \text{ Limespunkt von } X \text{ ist.} \end{cases}$$

*Beweis.* Wir definieren eine Funktion $G : V \to V$ wie folgt: für jedes $f \in V$ sei

$$G(f) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } f \text{ keine Funktion ist oder } \operatorname{vb} f \text{ kein Anfangsstück von } X, \\ a, & \text{falls } f \text{ die leere Funktion ist, also falls } f = \emptyset \text{ gilt,} \\ H(f(y)), & \text{falls } f \text{ Funktion ist und } \operatorname{vb} f = \{x \in X : x \leq y\} \text{ gilt,} \\ K(f), & \text{falls } \operatorname{vb} f \neq \emptyset \text{ Anfangsstück von } X \text{ ohne größtes Element ist.} \end{cases}$$

Nach dem Rekursionssatz existiert ein Funktion $F : X \to V$, so dass für jedes $x \in X$ gilt:

$$F(x) = G(F \restriction {}_{<}x)$$

Wir zeigen, dass $F$ die Bedingung $(**)$ erfüllt. Dazu benutzen wir Satz 4.39. Sei $x \in X$. Ist $x$ das kleinste Element von $X$, so gilt $F \restriction {}_{<}x = \emptyset$. Damit ist $G(F \restriction {}_{<}x) = G(\emptyset) = a$, wie in $(**)$ gefordert.

Ist $x = y'$ für ein $y \in X$, so gilt

$$F(x) = G(F \restriction {}_{<}x) = H(F \restriction {}_{<}x(y)) = H(F(y)).$$

Sei schließlich $x$ ein Limespunkt von $X$. Dann ist

$$F(x) = G(F \restriction {}_{<}x) = K(F \restriction {}_{<}x).$$

Insgesamt erfüllt $F$ die Bedingung $(**)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $F$ eindeutig bestimmt ist. Sei $F'$ eine weitere Funktion, die $(**)$ erfüllt. Wir benutzen wieder Satz 4.39, um $F = F'$ zu beweisen.

Sei $x \in X$. Ist $x = \min X$, so gilt $F(x) = a = F'(x)$. Ist $x = y'$ für ein $y \in X$ mit $F(y) = F'(y)$, so gilt

$$F(x) = H(F(y)) = H(F'(y)) = F'(x).$$

Ist $x$ Limespunkt von $X$ und gilt für alle $y < x$ die Gleichung $F(y) = F'(y)$, so gilt

$$F(x) = K(F \restriction {}_{<}x) = K(F' \restriction {}_{<}x) = F'(x).$$

Das zeigt $F = F'$. □

**Definition 4.43.** Eine Klasse $C$ heißt transitiv, falls aus $y \in C$ und $x \in y$ stets $x \in C$ folgt. Anders gesagt, $C$ ist transitiv, wenn gilt:

$$\forall y \in C \forall x (x \in y \Rightarrow x \in C)$$

Beispiele transitiver Mengen sind $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\{\{\emptyset\}\}$ ist nicht transitiv. Ist $C$ eine transitive Klasse, $n \in \mathbb{N}$ und gilt $x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_0 \in C$, so gilt für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$: $x_i \in C$.

**Lemma 4.44.** *Sei $C$ eine Klasse. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *$C$ ist transitiv.*
(2) $\forall y \in C (y \subseteq C)$
(3) $\bigcup C \subseteq C$
(4) $C \subseteq \mathcal{P}(C)$

**Übung 4.3.** *Zeige:*

*a) Sei $C$ eine Klasse transitiver Mengen. Dann sind auch $\bigcup C$ und $\bigcap C$ transitiv.*
*b) Ist $a$ eine transitive Menge, so sind auch $a \cup \{a\}$ und $\mathcal{P}(a)$ transitiv.*
*c) Jede natürliche Zahl ist transitiv.*

Im Folgenden werden wir Strukturen der Form $(C, \in \cap (C \times C))$ betrachten. Der Einfachheit halber schreiben wir anstelle von $(C, \in \cap (C \times C))$ oder $(C, \in \restriction C)$ aber nur $(C, \in)$.

**Satz 4.45** (Mostowskischer Isomorphiesatz für wohlgeordnete Klassen)**.** *Sei $(X, <)$ eine wohlgeordnete Klasse. Dann gibt es eine transitive Klasse $T$ und einen Isomorphismus*

$$\pi : (X, <) \to (T, \in)$$

*Insbesondere ist $T$ durch $\in \restriction T$ wohlgeordnet. $T$ und $\pi$ sind dabei eindeutig bestimmt. $T$ heißt das* Mostowski-Bild *von $X$, $\pi$ der* Mostowki-Isomorphismus*. Oft nennt man sowohl $T$ als auch $\pi$ auch den* Mostowski-Kollaps *von $X$.*

*Beweis.* Mit Hilfe des Rekursionssatzes definieren wir $\pi$ durch

$$\pi(x) := \{\pi(y) : y \in X \wedge y < x\} \quad (= \pi[{}_{<}x]).$$

(Genauer: sei $G : V \to V$ definiert durch

$$G(f) := \begin{cases} \mathrm{nb}\, f, & \text{falls } f \text{ Funktion ist,} \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $\pi : X \to V$ ist dann die eindeutig bestimmte Funktion, für die für alle $x \in X$ gilt: $\pi(x) = G(\pi \restriction {}_{<}x)$.) Wir setzen $T := \pi[X]$. Damit ist $\pi$ automatisch surjektiv.

Wir zeigen als nächstes, dass $\pi$ injektiv ist. Angenommen nicht. Wähle $x_2 \in X$ minimal mit der Eigenschaft, dass es ein $x_1 < x_2$ gibt, so dass $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ gilt. Es gilt dann

$$\{\pi(z_1) : z_1 < x_1\} = \pi(x_1) = \pi(x_2) = \{\pi(z_2) : z_2 < x_2\}.$$

Für $z_2 := x_1$ folgt daraus $\pi(z_2) = \pi(z_1)$ für ein $z_1 < x_1$. Es gilt also $z_1 < z_2 < x_2$ und $\pi(z_1) = \pi(z_2)$, ein Widerspruch zur Minimalität von $x_2$.

Nun kann man leicht sehen, dass $\pi$ ein Isomorphismus ist. Seien nämlich $x, y \in X$ mit $x < y$. Dann gilt

$$\pi(x) \in \{\pi(z) : z \in X \wedge z < y\} = \pi[_{<}y] = \pi(y).$$

Seien nun $x, y \in X$ mit $\pi(x) \in \pi(y)$. Dann ist $\pi(x) \in \pi[_{<}y]$ und damit $\pi(x) = \pi(z)$ für ein $z < y$. Da $\pi$ injektiv ist, gilt $x = z$ und damit $x < y$.

Es bleibt die Eindeutigkeit von $\pi$ nachzuweisen. Sei $\rho : (X, <) \to (S, \in)$ ein weiterer Isomorphismus mit transitivem $S$. Wir zeigen $\pi = \rho$ (und damit $T = \pi[X] = \rho[X] = S$).

Sei $\rho(y) = \pi(y)$ für alle $y < x$. Dann gilt

$$\rho(x) = \{s : s \in \rho(x)\} = \{s \in S : s \in \rho(x)\},$$

da $S$ transitiv ist. Wegen $S = \rho[X]$ und da $\rho$ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\{s \in S : s \in \rho(x)\} = \{\rho(y) : y \in X \wedge \rho(y) \in \rho(x)\} = \{\rho(y) : y < x\}.$$

Da $\rho$ und $\pi$ auf $_{<}x$ übereinstimmen, ergibt sich

$$\{\rho(y) : y < x\} = \{\pi(y) : y < x\} = \pi(x).$$

□

Ist $(X, <)$ eine wohlgeordnete Klasse, $x \in X$ nicht das letzte Element von $X$ und $\pi : (X, <) \to (T, \in)$ der Mostowski-Isomorphismus, so ist $\pi(x') = \pi(x) \cup \{\pi(x)\}$. Man erinnere sich an die Definition der natürlichen Zahlen!

**Korollar 4.46.** *Isomorphe Wohlordnungen haben die gleichen Mostowski-Bilder.*

*Beweis.* Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ isomorphe wohlgeordnete Klassen und $\pi_X : X \to T$ und $\pi_Y : Y \to S$ die zugehörigen Mostowski-Isomorphismen. Weiter sei $f : X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann ist $\pi_Y \circ f : X \to S$ ein Isomorphismus in eine transitive Klasse. Wegen der Eindeutigkeit des Mostowski-Isomorphismus' ist $\pi_Y \circ f = \pi_X$ und damit $S = T$. □

**Lemma 4.47.** *Sei $(X, <)$ wohlgeordnet und $Y$ ein Anfangsstück von $X$. Weiter seien $\pi_X : (X, <) \to (T, \in)$ und $\pi_Y : (Y, <) \to (S, \in)$ die zugehörigen Mostowski-Isomorphismen. Dann ist $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$. Insbesondere ist $(S, \in)$ ein Anfangstück von $(T, \in)$.*

*Beweis.* Man zeigt für $y \in Y$ induktiv $\pi_X(y) = \pi_Y(y)$. Angenommen, $\pi_Y \restriction {_{<}y} = \pi_X \restriction {_{<}y}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\pi_Y(y) = \{\pi_Y(z) : z \in Y \wedge z < y\} &= \{\pi_X(z) : z \in Y \wedge z < y\} \\ &= \{\pi_X(z) : z < y\} = \pi_X(y)\end{aligned}$$

Dabei gilt das vorletzte Gleichheitszeichen, weil $Y$ ein Anfangsstück von $X$ ist. □

**Korollar 4.48.** *Ist $(X, <)$ wohlgeordnet und $(Y, <)$ isomorph zu einem Anfangsstück von $X$, dann ist das Mostowski-Bild von $Y$ ein Anfangsstück des Mostowski-Bildes von $X$.*

*Beweis.* Sei $(Z, <)$ ein Anfangsstück von $(X, <)$ und $f : (Y, <) \to (Z, <)$ ein Isomorphismus. Nach Lemma 4.47 ist das Mostowski-Bild von $Z$ ein Anfangsstück des Mostowski-Bildes von $X$. Nach Korollar 4.46 haben $Y$ und $Z$ dasselbe Mostowski-Bild. □

**Definition 4.49.** Sei $(x, <)$ eine wohlgeordnete Menge. Dann heißt das Mostowski-Bild von $(x, <)$ der *Ordnungstyp* von $(x, <)$ und wird mit $\operatorname{otp}(x, <)$ bezeichnet.

### 4.7. **Ordinalzahlen.**

**Definition 4.50.** Eine *Ordinalzahl* ist eine transitive Menge, die durch $\in$ wohlgeordnet wird. Ord ist die Klasse aller Ordinalzahlen. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ sei

$$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \beta.$$

Zum Beispiel sind alle natürlichen Zahlen Ordinalzahlen. Allgemein ist jedes Mostowski-Bild einer wohlgeordneten Menge ist eine Ordinalzahl.

**Lemma 4.51.** *Ordinalzahlen sind genau die Mostowski-Bilder von wohlgeordneten Mengen.*

*Beweis.* Sei $\alpha$ eine Ordinalzahl, $T$ das Mostowski-Bild von $(\alpha, \in)$. Da $\alpha$ bereits transitiv ist und wegen der Eindeutigkeit des Mostowski-Bildes, ist $T = \alpha$. Die Ordinalzahl $\alpha$ ist also Mostowski-Bild einer Wohlordnung, nämlich der Wohlordnung $(\alpha, \in)$.

Umgekehrt ist jedes Mostowski-Bild einer wohlgeordneten Menge eine transitive Menge, die durch $\in$ wohlgeordnet ist, und damit Ordinalzahl. □

**Lemma 4.52.** *a)* Ord *ist eine transitive Klasse. D.h., die Elemente von Ordinalzahlen sind wieder Ordinalzahlen.*

*b) Für jede Ordinalzahl $\alpha$ gilt $\alpha = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}$.*

*c) Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ gilt $\alpha = \beta$ oder $\alpha \subsetneqq \beta$ oder $\alpha \supsetneqq \beta$.*

*d) Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ gilt: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneqq \beta$*

*Beweis.* a) Sei $\alpha$ eine Ordinalzahl und $z \in \alpha$. Nach Lemma 4.51 ist $\alpha$ Mostowski-Bild einer Wohlordnung $(X, <)$. Sei $\pi : X \to \alpha$ der Mostowski-Isomorphismus. Dann existiert $x \in X$ mit $z = \pi(x) = \pi[{}_{<}x]$. Die Menge $\pi[{}_{<}x]$ ist aber genau das Mostowski-Bild der Wohlordnung $({}_{<}x, <)$. Damit ist $z$ Ordinalzahl.

b) Sei $\alpha$ eine Ordinalzahl. Nach a) sind alle Elemente von $\alpha$ ebenfalls Ordinalzahlen. Nach Definition der Relation $<$ auf den Ordinalzahlen ist

$$\alpha = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta \in \alpha\} = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}.$$

c) Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$. Dann existieren Wohlordnungen $(X, <)$ und $(Y, <)$ und Isomorphismen $\pi_X : X \to \alpha$ und $\pi_Y : Y \to \beta$. Nach Satz 4.37 sind $X$ und $Y$ isomorph oder eine der beiden Wohlordnungen ist zu einem echten Anfangsstück der anderen isomorph. Im ersten Fall gilt $\alpha = \beta$ nach Korollar 4.46. Im zweiten Falle nehmen wir zunächst an, dass $X$ zu einem echten Anfangsstück von $Y$ isomorph ist. Nach Korollar 4.48 ist $\alpha$ dann ein echtes Anfangsstück von $\beta$. Es gilt also $\alpha \subsetneqq \beta$.

Analog gilt $\beta \subsetneqq \alpha$, falls $Y$ zu einem echten Anfangsstück von $X$ isomorph ist.

d) Die erste Äquivalenz ist die Definition von $<$. Für die zweite Äquivalenz sei $\alpha \in \beta$. Da $\beta$ transitiv ist, gilt $\alpha \subseteq \beta$. Wäre $\alpha = \beta$, so folgte $\alpha \in \alpha$. Wir zeigen, dass das nicht sein kann.

Sei $(X, <)$ Wohlordnung, deren Mostowski-Bild $\alpha$ ist. Sei $\pi : X \to \alpha$ der Mostowski-Isomorphismus. Wegen $\alpha \in \alpha$ existiert $x \in X$ mit $\alpha = \pi(x) = \pi[{}_{<}x]$. Wegen $x \notin {}_{<}x$ ist ${}_{<}x \neq X$. Da $\pi$ bijektiv ist, folgt

$$\alpha = \pi[X] \neq \pi[{}_{<}x] = \pi(x) = \alpha,$$

ein Widerspruch.

Sei nun $\alpha \subsetneqq \beta$. Als transitive Menge ist $\alpha$ ein Anfangsstück von $\beta$. Sei $(X, <)$ Wohlordnung und $\pi : X \to \beta$ Isomorphismus. Die Menge $\pi^{-1}[\alpha]$ ist ein echtes Anfangsstück von $X$. Wähle $x \in X$ mit ${}_{<}x = \pi^{-1}[\alpha]$. Dann gilt $\alpha = \pi[{}_{<}x] = \pi(x) \in \beta$. □

**Lemma 4.53.** *a) Die Relation $\in$ ist Wohlordnung auf* Ord.

*b) $0 = \emptyset = \min \mathrm{Ord}$ und für jede Ordinalzahl $\alpha$ ist $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$.*

*c) Ist $M$ eine Menge von Ordinalzahlen, so ist* $\bigcup M \in \mathrm{Ord}$. $\bigcup M$ *ist das Supremum von $M$ in* Ord. *Wir bezeichnen diese Ordinalzahl daher auch mit* $\sup M$.

*d)* Ord *ist echte Klasse.*

*Beweis.* a) Nach Lemma 4.52 d) ist die Relation $<$ irreflexiv und transitiv auf Ord. Nach Lemma 4.52 c) ist $<$ total.

Sei nun $C \subseteq \mathrm{Ord}$ mit $C \neq \emptyset$. Dann ist $\alpha := \bigcap C$ eine Menge. Da alle $\gamma \in C$ transitiv sind, ist auch $\alpha$ transitiv. Für beliebiges $\gamma \in C$ ist $\alpha \subseteq \gamma$ und damit durch $\in$ wohlgeordnet. Es folgt, dass $\alpha$ Ordinalzahl ist. Für alle $\gamma \in C$ ist $\alpha \subseteq \gamma$ und damit $\alpha \leq \gamma$.

Um zu zeigen, dass $\alpha$ das kleinste Element von $C$ ist, müssen wir nur noch $\alpha \in C$ zeigen. Angenommen, das ist nicht der Fall.

Dann gilt $\alpha < \gamma$ für alle $\gamma \in C$. Wegen $<=\in \cap(\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord})$ folgt $\alpha \in \bigcap C$, also $\alpha < \alpha$. Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 4.52 d).

b) $\emptyset = \min \mathrm{Ord}$ folgt sofort aus Lemma 4.52 d). Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Da $\alpha \cup \{\alpha\}$ eine transitive Menge ist, die durch $\in$ wohlgeordnet ist, existiert eine Ordinalzahl, die größer als $\alpha$ ist. Insbesondere existiert $\alpha'$. Es gilt

$$\alpha' = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha'\} = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta \leq \alpha\} = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

c) Sei $M$ eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\bigcup M$ eine Menge nach (Ver) und als Vereinigung einer Menge transitiver Mengen auch transitiv. Wegen der Transitivität von Ord ist $\bigcup M \subseteq \mathrm{Ord}$ und damit, nach a), durch $\in$ wohlgeordnet. Also ist $\bigcup M$ eine Ordinalzahl.

Offenbar gilt $\alpha \subseteq \bigcup M$ und damit $\alpha \leq \bigcup M$ für alle $\alpha \in M$. Damit ist $\bigcup M$ eine obere Schranke von $M$. Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$ eine weitere obere Schranke von $M$. Wir zeigen $\bigcup M \subseteq \alpha$.

Sei $\beta \in \bigcup M$. Dann existiert $\gamma \in M$ mit $\beta \in \gamma$, also mit $\beta < \gamma$. Es gilt $\gamma \leq \alpha$, da $\alpha$ obere Schranke von $M$ ist. Also ist $\beta < \alpha$ und damit $\beta \in \alpha$.

Das zeigt $\bigcup M \leq \alpha$. Damit ist $\bigcup M$ das (in einer linearen Ordnung eindeutige) Supremum von $M$.

d) Angenommen, Ord ist Menge. Dann ist $\alpha := \bigcup \mathrm{Ord}$ eine Ordinalzahl, und zwar die größte. Aber $\alpha \cup \{\alpha\}$ ist eine größere Ordinalzahl. Ein Widerspruch. □

Für zwei Ordinalzahlen $\alpha$ und $\beta$ kann man rekursiv das Produkt $\alpha \cdot \beta$ und die Summe $\alpha + \beta$ definieren. In dieser Rekursion unterscheiden wir Limesschritte und Nachfolgerschritte. Den Nachfolger einer Ordinalzahl $\alpha$ schreiben wir als $\alpha'$.

**Definition 4.54.** a) Eine Ordinalzahl $\alpha$ ist eine *Nachfolgerordinalzahl*, wenn es eine Ordinalzahl $\beta < \alpha$ mit $\alpha = \beta'$ gibt. Eine Ordinalzahl $\alpha > 0$, die keine Nachfolgerordinalzahl ist, heißt *Limesordinalzahl*.

b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ setzt man $\alpha + 0 := \alpha$ und $\alpha + \beta' := (\alpha + \beta)'$. Ist $\beta$ eine Limesordinalzahl, so definiert man $\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$.

c) Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ setzt man $\alpha \cdot 0 := 0$ und $\alpha \cdot \beta' := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$. Ist $\beta$ eine Limesordinalzahl, so definiert man $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$.

**Übung 4.4.** *Seien* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$. *Zeige mittels transfiniter Induktion:*

*a)* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

*b)* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

*c)* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

**Definition 4.55.** Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ linear geordnete Mengen. Die *Summe* von $X$ und $Y$ sei die lineare Ordnung $(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}, R)$, wobei die Relation $R$ wie folgt definiert ist:

Für $x_0, x_1 \in X$ sei $((x_0, 0), (x_1, 0)) \in R$, falls $x_0 < x_1$ gilt. Für $x \in X$ und $y \in Y$ sei $((x, 0), (y, 1)) \in R$. Für $y_0, y_1 \in Y$ sei $((y_0, 1), (y_1, 1)) \in R$, falls $y_0 < y_1$ gilt.

Die *lexikographische* Ordnung $<_{lex}$ auf dem Produkt $X \times Y$ wird wie folgt definiert:

Für $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ sei $(x_0, y_0) <_{lex} (x_1, y_1)$ genau dann, wenn entweder $x_0 < x_1$ gilt oder wenn $x_0 = x_1$ ist und $y_0 < y_1$ gilt.

Die lineare Ordnung $(X \times Y, <_{lex})$ ist das *lexikographische Produkt* von $(X, <)$ und $(Y, <)$.

**Übung 4.5.** *a) Zeige, dass das lexikographische Produkt zweier wohlgeordneter Mengen wieder wohlgeordnet ist.*

*b) Seien $\alpha$ und $\beta$ Ordinalzahlen. Zeige, dass $\alpha + \beta$ der Ordnungstyp der Summe von $(\alpha, \in)$ und $(\beta, \in)$ und $\alpha \cdot \beta$ der Ordnungstyp des lexikographischen Produkts von $(\beta, \in)$ und $(\alpha, \in)$ ist.*

Man beachte, dass auf den Ordinalzahlen weder Produkt noch Summe kommutativ sind. Sei nämlich $\omega$ die kleinste Limesordinalzahl (deren Existenz wir im nächsten Abschnitt aus einem weiteren Axiom folgern werden). Dann gilt

$$\omega + 1 \neq \omega = 1 + \omega$$

sowie

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega = 2 \cdot \omega.$$

Wir werden im Rest der Vorlesung nicht wieder auf diese *Ordinalzahlarithmetik* zurückkommen. Dafür werden wir intensiv *Kardinalzahlarithmetik* betreiben, die deutlich wichtiger ist, als das Rechnen mit Ordinalzahlen.

4.8. **Die natürlichen Zahlen und das Unendlichkeitsaxiom.** Wir definieren zunächst die natürlichen Zahlen als spezielle Ordinalzahlen. Diese Definition wird dem, was wir bisher über die natürlichen Zahlen gesagt haben, nicht widersprechen.

**Definition 4.56.** Eine Ordinalzahl $n$ heißt *natürliche Zahl*, falls keine Limesordinalzahl $\alpha \leq n$ existiert. $\mathbb{N}$ sei die Klasse der natürlichen Zahlen. Die Operation $'$ bezeichnet wieder die Nachfolgeroperation auf den Ordinalzahlen. Im Zusammenhang mit $\mathbb{N}$ meinen wir mit $'$ meist die auf $\mathbb{N}$ eingeschränkte Nachfolgeroperation.

Bevor wir ein neues Axiom, das *Unendlichkeitsaxiom*, einführen, welches garantiert, dass die Klasse $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen überhaupt eine Menge ist, rechnen wir nach, dass die Struktur $(\mathbb{N}, 0, ')$ die *Peano-Axiome* erfüllt.

(P1) 0 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Mit jeder natürlichen Zahl $n$ ist auch $n'$ eine natürliche Zahl.
(P3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n' \neq 0$.
(P4) Sind $m$ und $n$ verschiedene natürliche Zahlen, so sind auch $m'$ und $n'$ verschieden.
(P5) Ist $C \subseteq \mathbb{N}$ eine Klasse mit $0 \in C$ und $n' \in C$ für alle $n \in C$, so gilt $C = \mathbb{N}$.

**Satz 4.57.** $(\mathbb{N}, 0, ')$ *erfüllt* (P1)–(P5).

*Beweis.* (P1) ist klar. Ist $n$ eine natürliche Zahl, so gibt es keine Limesordinalzahl $\alpha \leq n$. Da $n'$ keine Limesordinalzahl ist, gibt es damit auch keine Limesordinalzahl $\alpha \leq n'$. Das zeigt (P2).

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n' = n \cup \{n\} \neq \emptyset = 0$. Das zeigt (P3).

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. O.B.d.A. sei $m < n$. Dann ist $m' \leq n < n'$ und damit $m' \neq n'$. Das zeigt (P4).

Sei schließlich $C \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in C$ und $n' \in C$ für alle $n \in C$. Angenommen, $C \neq \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $n \notin C$. Wegen $0 \in C$ gilt $0 < n$. Da $n$ keine Limesordinalzahl ist, existiert eine Ordinalzahl $m$ mit $m' = n$. Mit $n$ ist auch $m$ eine natürliche Zahl. (Die natürlichen Zahlen bilden also ein Anfangsstück von Ord).

Wegen der Minimalität von $n$ ist $m \in C$. Damit ist auch $n = m' \in C$, ein Widerspruch. Das zeigt (P5). $\square$

Die ZF-Axiome, die bisher eingeführt wurden, garantieren noch nicht, dass es eine im intuitiven Sinne unendliche Menge gibt. Das Unendlichkeitsaxiom beseitigt dieses Problem.

**Definition 4.58.** Eine Klasse $C$ heißt *induktiv*, wenn $\emptyset \in C$ gilt und für alle $x \in C$ auch $x \cup \{x\} \in C$ ist.

Wir wissen bereits, dass Ord und $\mathbb{N}$ induktive Klassen sind. (Wir wissen aber nicht, dass Ord $\neq \mathbb{N}$ gilt.) Offenbar ist auch $V$ eine induktive Klasse.

Für jede induktive Klasse $D$ ist $\mathbb{N} \subseteq D$. Sei nämlich $C := \mathbb{N} \cap D$. Wie man leicht sieht, ist auch $C$ induktiv. (Allgemein ist der Durchschnitt zweier induktiver Klassen wieder induktiv.) Nach (P5) ist $C = \mathbb{N}$.

**(Un) Unendlichkeitsaxiom.** Es gibt eine induktive Menge.

**Korollar 4.59.** $\mathbb{N}$ *ist eine Menge.*

*Beweis.* Sei $D$ eine induktive Menge. Dann ist $\mathbb{N} \subseteq D$. Nach (Aus) ist $\mathbb{N}$ Menge. □

Da Ord eine echte Klasse ist, ist $\mathbb{N}$ ein echtes Anfangsstück von Ord. Das rechtfertigt die folgende Definition.

**Definition 4.60.** $\omega := \min(\mathrm{Ord} \setminus \mathbb{N})$

Offenbar gilt $\omega = \mathbb{N}$. Außerdem ist $\omega$ die kleinste Limesordinalzahl.

**Übung 4.6.** *Eine Klasse $X$ heiße* schwach induktiv*, wenn sie nicht leer ist und für alle $x \in X$ die Menge $x \cup \{x\}$ ein Element von $X$ ist. Zeige, dass es für jede schwach induktive Klasse $X$ eine Injektion $e : \mathbb{N} \to X$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e(n') = e(n) \cup \{e(n)\}$.*

*Schließe daraus, dass aus der Existenz einer schwach induktiven Menge die Existenz einer induktiven Menge folgt. (Natürlich ohne Benutzung von* (Un)*.)*

Durch diese Ubung ist die alternative Formulierung von (Un) am Anfang des Skripts gerechtfertigt.

**Definition 4.61.** Eine Menge $x$ heißt *endlich*, wenn es eine natürliche Zahl $n$ und eine Bijektion $f : n \to x$ gibt.

Offenbar ist jede natürliche Zahl endlich. Dass jede Ordinalzahl $> \omega$ unendlich ist, ist anschaulich klar, muss aber gezeigt werden.

**Lemma 4.62.** *Ist $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in$ Ord und $\alpha \neq n$, so gibt es keine Bijektion zwischen $n$ und $\alpha$. Insbesondere sind alle Ordinalzahlen $\alpha \geq \omega$ unendlich.*

*Beweis.* Wegen $\alpha \neq n$ können wir $n < \alpha$ annehmen.

Zunächst betrachten wir den Fall $\alpha \in \mathbb{N}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $n$. Ist $n = 0$, also $n = \emptyset$, so gibt es keine Bijektion zwischen $\alpha$ und $n$, da $\alpha \neq \emptyset$.

Gelte nun die Behauptung für $n$ und sei $n + 1 < \alpha$. Wegen $0 < n + 1 < \alpha$ und $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $\alpha$ von der Form $m + 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Angenommen,
$$f : n + 1 \to \alpha = m + 1$$
ist bijektiv. Wir definieren $g : m + 1 \to m + 1$ wie folgt: Es sei $g(f(n)) := m$, $g(m) := f(n)$ und $g(x) := x$ für alle $x \in (m + 1) \setminus \{m, f(n)\}$. ($m$ und $f(n)$ werden durch $g$ also vertauscht, wenn sie nicht gleich sind.) Die Funktion $g$ und damit auch $h := g \circ f$ ist bijektiv.

Es gilt $h : n + 1 \to m + 1$ und $h(n) = g(f(n)) = m$. Setze $h_0 := h \upharpoonright n$. Dann ist $h_0$ eine Bijektion zwischen $n$ und $m$. Wegen $n + 1 < \alpha = m + 1$ ist $n < m$, ein Widerspruch zur Induktionsannahme.

Sei nun $\alpha \geq \omega$. Wir zeigen Folgendes durch Induktion über $n$: ist $f : n \to \alpha$ eine beliebige Funktion, so ist

$$s_f := \sup(f[n] \cap \omega) < \omega.$$

Insbesondere ist $s_f + 1 \in \omega \setminus f[n]$ und $f$ damit nicht surjektiv.

Für $n = 0$ ist $s_f = \sup \emptyset = 0 < \omega$. Sei nun die Behauptung richtig für $n$, und sei $g : n + 1 \to \alpha$ eine beliebige Funktion. Setze $f := g \restriction n$. Nach Induktionsannahme ist $s_f < \omega$. Wegen $n + 1 = n \cup \{n\}$ ist

$$s_g = \begin{cases} s_f, & \text{falls } g(n) \leq s_f, \\ g(n), & \text{falls } s_f < g(n) < \omega, \\ s_f, & \text{falls } \omega \leq g(n). \end{cases}$$

In jedem Falle ist mit $s_f$ auch $s_g < \omega$. □

**Definition 4.63.** Nach Lemma 4.62 ist für jede endliche Menge $x$ die natürliche Zahl $n$, so dass es eine Bijektion zwischen $x$ und $n$ gibt, eindeutig bestimmt. Wir nennen $n$ die *Kardinalzahl* bzw. die *Mächtigkeit* von $x$ und schreiben $|x|$ für $n$.

Man kann Endlichkeit von Mengen auch definieren, ohne vorher die natürlichen Zahlen einzuführen. Zum Beispiel heißt eine Menge $x$ *Dedekind-endlich* (*D-endlich*), wenn es keine Bijektion zwischen $x$ und einer echten Teilmenge von $x$ gibt. Hat man das Auswahlaxiom zur Verfügung, welches wir später noch ausführlich diskutieren werden, so fallen diese verschiedenen Endlichkeitsbegriffe zusammen. Setzt man nur die Axiome von ZF voraus, so kann es durchaus D-endliche Mengen geben, die sich nicht bijektiv auf eine natürliche Zahl abbilden lassen.

### 4.9. **Fundierte Relationen und das Fundierungsaxiom.**

**Definition 4.64.** Sei $C$ eine Klasse und $E$ eine Relation (nicht notwendiger Weise auf $C$). Ein Element $x \in C$ heißt *$E$-minimal* in $C$, falls es kein $y \in C$ mit $yEx$ gibt.

Für jede Menge $x$ sei $\mathrm{ext}_E(x) := \{y : yEx\}$ die *Extension* von $x$ bzgl. $E$. Die Relation $E$ heißt *extensional*, wenn für alle $x, y$ gilt:

$$\mathrm{ext}_E(x) = \mathrm{ext}_E(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Ist $(X, <)$ eine Wohlordnung und $x \in X$, so ist $\mathrm{ext}_<(x) = {}_<x$. Sei $E := \{(x, y) : x \in y\}$ die $\in$-Relation. Dann ist $\mathrm{ext}_E(x) = \{y : y \in x\} = x$ für alle $x$. Das Extensionalitätsaxiom besagt also genau, dass $\in$ extensional ist.

**Definition 4.65.** Eine Relation $E$ auf $X$ heißt *fundiert*, falls

(1) für jedes $x \in X$ die Extension $\mathrm{ext}_E(x)$ eine Menge ist ($E$ ist *mengenartig*) und
(2) jede nichtleere Teilmenge von $X$ ein $E$-minimales Element hat.

Zum Beispiel ist eine lineare Ordnung genau dann fundiert, wenn sie eine Wohlordnung ist.

**Lemma 4.66.** *Sei $E$ eine fundierte Relation auf $X$. Dann gibt es keine Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ in $X$ mit $\dots x_2 E x_1 E x_0$. Etwas formaler, es gibt keine Funktion $f : \omega \to X$ mit $f(n + 1)Ef(n)$ für alle $n \in \omega$.*

*Beweis.* Angenommen doch. Sei $(x_n)_{n\in\omega}$ eine Folge in $X$ mit $\dots x_2 E x_1 E x_0$. Setze $a := \{x_n : n \in \omega\}$. Nach (Un) und (Ers) ist $a$ eine Menge. Außerdem ist $a \neq \emptyset$. Aber offenbar hat $a$ kein $E$-minimales Element. □

**Korollar 4.67.** *Ist $E$ fundierte Relation auf $X$, so gibt es kein $x \in X$ mit $xEx$.*

Setzt man wieder das Auswahlaxiom voraus, so gilt auch die Umkehrung von Lemma 4.66.

**Lemma 4.68.** *Sei $E$ fundierte Relation auf $X$ und $C \subseteq X$ eine nichtleere Klasse. Dann hat $C$ ein $E$-minimales Element.*

*Beweis.* Sei $c \in C$. Ist $c$ bereits $E$-minimal in $C$, so sind wir fertig. Ist $c$ nicht $E$-minimal, so definieren wir Mengen $s_n$, $n \in \omega$ wie folgt:

Setze $s_0 := \{c\}$. Weiter sei für jedes $n \in \omega$

$$s_{n+1} := \bigcup\{\mathrm{ext}_E(x) : x \in s_n\}.$$

Wegen der Mengenartigkeit von $E$ und nach (Ver) und (Ers) sind die $s_n$ Mengen.

Schließlich sei $t := \bigcup\{s_n : n \in \omega\}$. Nach (Un), (Ver) und (Ers) ist auch $t$ eine Menge.

Setze $a := t \cap C$. Nach (Aus) ist $a$ Menge. Wegen $c \in a$ ist $a \neq \emptyset$. Sei $x$ ein $E$-minimales Element von $a$. Wir zeigen, dass $x$ auch $E$-minimal in $C$ ist.

Sei nämlich $y \in C$. Angenommen es gilt $yEx$. Wegen $x \in t$ existiert $n \in \omega$ mit $x \in s_n$. Es is $y \in \mathrm{ext}_E(x)$, also $y \in s_{n+1} \subseteq t$. Wegen $y \in C$ ist $y \in a$. Damit ist $x$ nicht $E$-minimales Element von $a$, ein Widerspruch. $\square$

Man beachte, dass der Beweis von Lemma 4.68 nur deshalb so viel aufwändiger ist, als der des entsprechenden Lemmas für Wohlordnungen, weil wir für fundierte Relationen nicht fordern, dass sie transitiv sind.

Wir haben transfinite Induktion und Rekursion bisher für Wohlordnungen eingeführt. Induktion und Rekursion funktionieren aber auch für fundierten Relationen.

**Satz 4.69** (Transfinite Induktion für fundierte Relationen)**.** *Sei $E$ eine fundierte Relation auf $X$ und $\Phi$ eine Eigenschaft von Mengen. Für alle $x \in X$ gelte: haben alle $y \in X$ mit $yEx$ die Eigenschaft $\Phi$, so auch $x$. Dann haben alle Elemente von $X$ die Eigenschaft $E$.*

*Beweis.* Angenommen nicht. Dann ist die Klasse

$$C := \{x \in X : x \text{ hat nicht die Eigenschaft } \Phi\}$$

nichtleer. Sei $c$ eine $E$-minimales Element von $C$. Dann haben alle $y \in X$ mit $yEc$ die Eigenschaft $\Phi$. Nach Voraussetzung hat damit auch $c$ die Eigenschaft $\Phi$, ein Widerspruch. $\square$

**Satz 4.70** (Rekursionssatz für fundierte Relationen)**.** *Sei $E$ eine fundierte Relation auf $X$. Weiter sei $G : X \times V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F : X \to V$, so dass für alle $x \in X$ gilt:*

$$F(x) = G(x, F \restriction \mathrm{ext}_E(x))$$

*Beweis.* Wir sagen, dass $Y \subseteq X$ ein *Anfangsstück* von $X$ ist, falls für alle $y \in Y$ gilt: $\mathrm{ext}_E(y) \subseteq Y$. Transitive Mengen sind also zum Beispiel einfach Mengen, die Anfangstücke von $V$ bzgl. der Relation $\in$ sind.

Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathcal{F} := \{f : f \text{ ist Funktion, } \mathrm{vb}\, f \text{ ist ein Anfangstück von } X \\ \text{und für alle } x \in \mathrm{vb}\, f \text{ gilt } f(x) = G(x, f \restriction \mathrm{ext}_E(x))\}\end{aligned}$$

Ähnlich wie im Beweis des Rekursionssatzes kann man nun zeigen, dass $F := \bigcup \mathcal{F}$ das Gewünschte leistet und durch die Rekursionsvorschrift eindeutig bestimmt ist. $\square$

Man kann sich fragen, warum im Rekursionssatz für fundierte Relationen die Funktion $G$ nicht nur ein Argument hat, nämlich $F \restriction \mathrm{ext}_E(x)$, hat, sondern zusätzlich noch $x$ selber. Der Grund für diesen Unterschied zum Rekursionssatz für Wohlordnungen ist, dass sich im Falle einer Wohlordnung $E$ das $x$ aus der Funktion

$F \restriction \text{ext}_E(x)$ rekonstruieren lässt. Es gilt nämlich $x = \sup \text{vb}(F \restriction \text{ext}_E(x))$. Im allgemeinen Fall geht das jedoch nicht. Deshalb führt man $x$ als zusätzliches Argument ein und erhält einen besser anwendbaren Satz.

**Übung 4.7.** *Man führe den Beweis des Rekursionssatzes für fundierte Relationen genau aus.*

**(Fund) Fundierungsaxiom.** Die Relation $\in$ ist fundiert.

Wegen (Fund) können wir unsere bisherigen Erkenntnisse über fundierte Relationen auch auf $\in$ anwenden. Insbesondere können wir Induktion und Rekursion bezüglich $\in$ benutzen.

**Korollar 4.71.** *Sei $\Phi$ eine Eigenschaft von Mengen. Für alle $x$ gelte: haben alle $y \in x$ die Eigenschaft $\Phi$, so hat auch $x$ die Eigenschaft $\Phi$. Dann haben alle Mengen die Eigenschaft $\Phi$.*

**Korollar 4.72.** *Sei $G : V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F : V \to V$, so dass für alle $x$ gilt:*

$$F(x) = G(F \restriction x)$$

Als Beispiel für eine Funktion, die man durch Rekursion über $\in$ definieren kann, definieren wir den Rang einer Menge.

**Definition 4.73.** Für jede Menge $x$ sei $\text{rg}(x) = \sup\{\text{rg}(y) + 1 : y \in x\}$ der *Rang* von $x$.

We man leicht mittels Induktion über $\in$ sieht, ist der Rang einer jeden Menge eine Ordinalzahl. Was der Rang bedeutet, sehen wir gleich.

**Definition 4.74.** Wir definieren rekursiv eine Funktion $F : \text{Ord} \to V$. Für $F(\alpha)$ schreiben wir $V_\alpha$. Sei $V_\emptyset := \emptyset$ und $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$ für alle $\alpha \in \text{Ord}$. Ist $\alpha$ Limesordinalzahl, so sei

$$V_\alpha := \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\}.$$

**Satz 4.75.** *a) Jedes $V_\alpha$ ist transitiv.*

*b) Für alle $\alpha, \beta \in \text{Ord}$ mit $\alpha \leq \beta$ gilt $V_\alpha \subseteq V_\beta$.*

*c) Für alle $x$, $x \in V_{\text{rg}(x)+1}$. Insbesondere ist $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \text{Ord}\}$.*

*d) Für jede Menge $x$ ist $\text{rg}(x) = \min\{\alpha \in \text{Ord} : x \in V_{\alpha+1}\}$.*

*Beweis.* a) folgt mittels Induktion über Ord daraus, dass Potenzmengen transitiver Mengen sowie Vereinigungen über Klassen transitiver Mengen transitiv sind.

b) Sei $\alpha \in \text{Ord}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $\beta \geq \alpha$. Offenbar ist $V_\alpha \subseteq V_\alpha$. Gelte $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Wegen der Transitivität von $V_\beta$ ist jedes Element von $V_\alpha$ Teilmenge von $V_\beta$. Das zeigt $V_\alpha \subseteq \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$.

Sei nun $\beta > \alpha$ eine Limesordinalzahl. Dann ist

$$V_\alpha \subseteq \bigcup\{V_\gamma : \gamma < \beta\} = V_\beta.$$

c) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $\in$. Angenommen, für alle $y \in x$ gilt $y \in V_{\text{rg}(y)+1}$. Dann ist

$$x \subseteq \bigcup\{V_{\text{rg}(y)+1} : y \in x\} = V_{\sup\{\text{rg}(y)+1 : y \in x\}} = V_{\text{rk}(x)}.$$

Man beachte, dass $\bigcup\{V_{\text{rg}(y)+1} : y \in x\} = V_{\sup\{\text{rg}(y)+1 : y \in x\}}$ sowohl dann gilt, wenn $\{\text{rg}(y) + 1 : y \in x\}$ ein größtes Element hat, als auch, wenn $\{\text{rg}(y) + 1 : y \in x\}$ kein größtes Element hat. Es folgt $x \in \mathcal{P}(V_{\text{rg}(x)}) = V_{\text{rk}(x)+1}$.

d) Nach c) gilt $\min\{\alpha \in \text{Ord} : x \in V_{\alpha+1}\} \leq \text{rg}(x)$ für alle $x$. Sei nun $x$ eine Menge, so dass für alle $y \in x$ die Gleichung $\text{rg}(y) = \min\{\alpha \in \text{Ord} : y \in V_{\alpha+1}\}$ gilt. Sei $\alpha < \text{rg}(x)$. Dann existiert ein $y \in x$ mit $\alpha < \text{rg}(y) + 1$. Nach unserer

Induktionsannahme ist $y \notin V_{\alpha+1}$. Da $V_{\alpha+1}$ transitiv ist und $y \in x$, folgt aus $y \notin V_{\alpha+1}$ auch $x \notin V_{\alpha+1}$. Damit ist $\mathrm{rg}(x)$ wirklich die minimale Ordinalzahl $\alpha$ mit $x \in V_{\alpha+1}$. □

Da für jede Limesordinalzahl $\beta$ die Menge $V_\beta$ die Vereinigung der $V_\alpha$, $\alpha < \beta$, ist, kommen an Limesstellen der *Von-Neumann-Hierarchie* $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Ord}}$ keine neuen Mengen hinzu. Neue Mengen entstehen nur an Nachfolgerstellen. Das eklärt, warum der Rang einer Menge die minimale Ordinalzahl $\alpha$ mit $x \in V_{\alpha+1}$ ist und nicht etwa die minimale Ordinalzahl $\alpha$ mit $x \in V_\alpha$.

Man beachte, dass (Fund) für die Definition der $V_\alpha$ nicht benötigt wird. (Fund) wird nur für den Nachweis von $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ benutzt. Es lässt übrigens zeigen, dass die Klasse $W := \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ alle ZF-Axiome erfüllt, auch wenn $V$ nur ZF ohne das Fundierungsaxiom erfüllt.

Das Fundierungsaxiom wird in der sonstigen Mathematik eigentlich nicht gebraucht, für den Stoff der Vorlesung „Modelle der Mengenlehre“ ist es aber unverzichtbar.

Wir beweisen nun noch eine allgemeinere Form des Isomorphiesatzes von Mostowski.

**Satz 4.76.** *Sei $E$ eine extensionale, fundierte Relation auf einer Klasse $X$. Dann gibt es eine transitive Klasse $T$ und einen Isomorphismus $F : (X, E) \to (T, \in)$. $T$ und $f$ sind dabei eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Wir definieren $F : X \to V$ durch die Rekursionsvorschrift $F(x) = \{F(y) : y \in \mathrm{ext}_E(x)\}$ und setzen $T = F[X]$. Offensichtlich gilt dann für alle $x, y \in X$ mit $xEy$ auch $F(x) \in F(y)$.

Die Funktion $F$ ist injektiv: Sonst sei $x \in X$ minimal mit der Eigenschaft, dass es ein von $x$ verschiedenes $y \in X$ mit $F(x) = F(y)$ gibt. Nach Rekursionsvorschrift gilt dann $\{F(z) : z \in \mathrm{ext}_E(x)\} = \{F(z) : z \in \mathrm{ext}_E(y)\}$. Nach Wahl von $x$ gibt es für kein $z \in \mathrm{ext}_E(x)$ ein von $z$ verschiedenes $z' \in X$ mit $F(z) = F(z')$. Es folgt, dass $F$ auf der Menge $F^{-1}[F[\mathrm{ext}_E(x)]]$ injektiv ist. Damit gilt $\mathrm{ext}_E(x) = \mathrm{ext}_E(y)$. Da $E$ extensional ist, folgt daraus $x = y$. Ein Widerspruch.

Damit ist $F$ eine Bijektion von $X$ nach $T$. Seien nun $x, y \in Y$ mit $F(x) \in F(y)$. Nach Definition von $F$ existiert dann ein $z \in X$ mit $F(z) = F(x)$ und $zEx$. Da $F$ injektiv ist, ist $x = z$. Also gilt $xEy$. Es folgt, dass $F$ ein Isomorphismus ist.

Die Transitivität von $T$ ergibt sich nun wie folgt: Sei $t \in T$ und $s \in t$. Dann existiert ein $y \in X$ mit $F(y) = t$. Es gilt also $t = F(y) = \{F(x) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\}$. Also ist $s$ von der Form $F(x)$ für ein $x \in X$ mit $xEy$. Insbesondere ist $s \in T$.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von $F$ und $T$. Sei $S$ transitiv und $G : (X, E) \to (S, \in)$ ein Isomorphismus. Angenommen $F \neq G$. Sei $y \in X$ minimal mit der Eigenschaft $F(y) \neq G(y)$. Es ist $F(y) = \{F(x) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\} = \{G(x) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\}$. Da $G$ ein Isomorphismus ist, gilt $F(y) = \{G(y) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\} \subseteq G(y)$. Wegen $F(y) \neq G(y)$ gibt es ein $s \in G(y) \setminus F(y)$. Da $S$ transitiv ist, ist $s \in S$. Also gibt es ein $x \in X$ mit $G(x) = s$. Wegen $s \in G(y)$ und da $G$ ein Isomorphismus ist, gilt $xEy$. Damit ist aber $s = G(x) = F(x) \in F(y)$. Das steht aber im Widerspruch zu $s \notin F(y)$. Es folgt $F = G$. Damit gilt natürlich auch $S = T$. □

Diese Version des Satzes von Mostowski wird häufig angewendet, wenn man Modelle von ZF studiert.

## 5. Das Auswahlaxiom und einige Äquivalenzen

**Definition 5.1.** Sei $I$ eine Menge und $F = (X_i)_{i\in I}$ eine mit $I$ indizierte Familie von Mengen. (Formal ist $F$ also einfach eine Funktion mit $\mathrm{vb}\, F = I$.) Eine *Auswahlfunktion* für $F$ ist eine Funktion $c : I \to \bigcup\{X_i : i \in I\}$ mit $c(i) \in X_i$ für alle $i \in I$.

Eine Auswahlfunktion $c$ wählt also aus jedem $X_i$ ein Element aus. So eine Funktion kann es natürlich höchstens dann geben, wenn die $X_i$ nicht leer sind.

**(AC) Auswahlaxiom.** Jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ nichtleerer Mengen hat eine Auswahlfunktion.

Das Auswahlaxiom gehört nicht zu den ZF-Axiomen und ist auch von ihnen unabhängig. D.h., es lässt sich zeigen, dass weder (AC) noch $\neg$(AC) aus ZF folgen. (AC) spielt insofern eine Sonderrolle, als dass viele seiner Konsequenzen sehr paradox klingen, was an der völlig unkonstruktiven Natur dieses Axioms liegt.

Eine sehr populäre Paradoxie ist das *Banach-Tarski Paradoxon*: die dreidimensionale Vollkugel lässt in endlich viele Teile zerlegen, die, anders zusammengesetzt, zwei Vollkugeln der ursprünglichen Größe ergeben. Das ist kein Widerspruch, weil die Teile nicht (Lebesgue-)messbar sein müssen. Allerdings schließt (AC) auch gewisse Paradoxien aus. Zum Beispiel kann es ohne (AC) eine unendliche Menge $a$ geben, so dass für jede Teilmenge $b$ von $a$ gilt: $b$ oder $a \setminus b$ ist endlich.

Ab dem nächsten Kapitel werden wir fast alle Beweise in der Mengenlehre ZFC, also in ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom, führen.

**Definition 5.2.** Sei $(P,<)$ eine halbgeordnete Menge. Eine Menge $K \subseteq P$ heißt *Kette*, wenn $K$ durch $<$ linear geordnet ist.

**Satz 5.3.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) (AC)
(2) (Zermeloscher Wohlordnungssatz) *Auf jeder Menge $X$ gibt es eine Wohlordnung $<$.*
(3) (Zornsches Lemma) *Ist* $(P,<)$ *eine nichtleere halbgeordnete Menge und hat jede Kette in $P$ eine obere Schranke, so hat $P$ ein maximales Element.*

*Beweis.* (1)$\Rightarrow$(2): Sei $X$ eine Menge. Nach (AC) gibt es eine Funktion

$$c : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$$

mit $c(M) \in M$ für alle $M \subseteq X$. Sei $u$ eine Menge, die kein Element von $X$ ist. (So eine Menge $u$ existiert, da $V$ eine echte Klasse ist und damit $X \neq V$ gilt.) Wir definieren eine Funktion $F : Ord \to X \cup \{u\}$ wie folgt: sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$ und $F(\beta)$ bereits definiert für alle $\beta < \alpha$. Setze

$$F(\alpha) := \begin{cases} u, & \text{falls es ein } \beta < \alpha \text{ mit } F(\beta) = u \text{ gibt,} \\ u, & \text{falls } X = F[\alpha] \text{ ist und} \\ c(X \setminus F[\alpha]), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $C := \{\beta \in \mathrm{Ord} : F(\beta) \in X\}$. Dann ist $C$ ein Anfangsstück von Ord. Sind $\alpha, \beta \in C$ mit $\alpha < \beta$, so ist

$$F(\beta) \in X \setminus \{F(\gamma) : \gamma < \beta\}.$$

Insbesondere ist $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Damit ist $F \restriction C$ injektiv. Nach (Ers) ist mit $X$ auch $C$ eine Menge. Also existiert eine Ordinalzahl $\alpha$ mit $C = \alpha$. Die Funktion $f := F \restriction \alpha$ ist eine Bijektion zwischen $\alpha$ und $X$.

Wir definieren nun eine Wohlordnung $<$ auf $X$ mittels

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) \in f^{-1}(y).$$

(2)$\Rightarrow$(3) Sei $(P,<)$ eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Angenommen, $P$ hat kein maximales Element. Nach (2) existiert eine Wohlordnung $\prec$ auf $P$.

Wir definieren eine Funktion

$$s : \{K \subseteq P : K \text{ ist Kette in } P\} \to P,$$

so dass $s(K)$ für jede Kette $K \subseteq P$ eine echte obere Schranke von $K$ ist. (Eine echte obere Schranke von $K$ ist eine obere Schranke, die selbst nicht Element von $K$ ist.)

Das geht wie folgt: ist $K \subseteq P$ eine Kette, so hat $K$ eine obere Schranke $x \in P$. Da $x$ nicht maximal in $P$ ist, existiert $y \in P$ mit $x < y$. Offenbar ist $y$ eine echte obere Schranke von $K$. Jede Kette in $P$ hat also eine echte obere Schranke. Für jede Kette $K \subseteq P$ sei $s(K) \in P$ die bzgl. $\prec$ kleinste echte obere Schranke von $K$.

Mit Hilfe von $s$ konstruieren wir nun eine injektive Funktion $F : \mathrm{Ord} \to P$. Das ist ein Widerspruch, da $P$ Menge ist und Ord eine echte Klasse.

Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Für alle $\beta < \alpha$ sei $F(\beta)$ bereits definiert und für alle $\gamma < \beta$ gelte $F(\gamma) < F(\beta)$. Offenbar ist $K := \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ eine Kette. Setze $F(\alpha) := s(K)$. Es ist klar, dass $F$ streng monoton und damit injektiv ist.

(3)$\Rightarrow$(1) Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Setze

$$P := \{f : f \text{ ist Funktion, } \operatorname{vb} F \subseteq I \text{ und für alle } i \in I \text{ ist } f(i) \in X_i\}.$$

Man beachte, dass $P$ zumindest die leere Funktion enthält. Damit ist $P$ nicht leer. Wegen $P \subseteq I \times \bigcup\{X_i : i \in I\}$ ist $P$ Menge. $P$ ist halbgeordnet durch $\subsetneqq$.

Sei $K \subseteq P$ eine Kette. Dann sind die Funktionen in $K$ paarweise verträglich. Damit ist $h := \bigcup K$ eine Funktion. Offenbar gilt $\operatorname{vb} h \subseteq I$. Für jedes $i \in \operatorname{vb} h$ existiert ein $f \in K$ mit $i \in \operatorname{vb} f$. Es gilt $h(i) = f(i) \in X_i$. Damit ist $h \in P$. Es ist klar, dass $h$ eine obere Schranke von $K$ ist.

Nach (3) hat $P$ ein maximales Element $c$. Wir haben $\operatorname{vb} c = I$ zu zeigen. Angenommen, es gibt $i \in I$ mit $i \notin \operatorname{vb} c$. Wegen $X_i \neq \emptyset$ gibt es ein $x \in X$. Setze $f := c \cup \{(i, x)\}$. Dann gilt $f \in P$ und $c \subsetneqq f$. Damit ist $c$ nicht maximal in $P$. Ein Widerspruch. □

**Übung 5.1.** *Zeige, dass* (AC) *äquivalent zu folgender Aussage ist:*

*Für jede Menge $X$ und jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X$ existiert eine Menge $T \subseteq X$, die jede $\sim$-Äquivalenzklasse in genau einem Punkt schneidet.*

Eine bekannte Anwendung des Zornschen Lemmas ist der Basisexistenzsatz für Vektorräume. Mit dem Wohlordnungssatz lässt sich relativ elegant der algebraische Abschluss eines gegebenen Körpers konstruieren. Wir geben noch eine Anwendung von (AC) an.

**Lemma 5.4.** *Es gibt eine Teilmenge $M$ von $\mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.*

*Beweis.* Für eine messbare Teilmenge $T$ von $\mathbb{R}$ bezeichne $\mu(T)$ das Lebesguesche Maß von $T$. Wir benutzen folgende Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes:

(1) Ist $T \subseteq \mathbb{R}$ messbar, so ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch $a + T = \{a + b : b \in T\}$ messbar und es gilt $\mu(T) = \mu(a + T)$ (Translationsinvarianz).
(2) Sind $T_n \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \omega$, paarweise disjunkt und messbar, so ist auch $\bigcup\{T_n : n \in \omega\}$ messbar und es gilt $\mu(\bigcup\{T_n : n \in \omega\}) = \sum_{n \in \omega} \mu(T_n)$ ($\sigma$-Additivität). Dabei ist $\infty$ als Maß einer Menge erlaubt.
(3) $\mu([0, 1)) = 1$ und $\mu(\emptyset) = 0$.

Betrachte die Äquivalenzrelation

$$\sim := \{(x, y) \in [0, 1)^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$$

auf $[0, 1)$. Nach Übung 5.1 gibt es eine Menge $M \subseteq [0, 1)$, die jede $\sim$-Äquivalenzklasse in genau einem Punkt trifft. Wir zeigen, dass $M$ nicht messbar ist.

Angenommen doch. Sei $\varepsilon = \mu(M)$. Für jedes $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ sei

$$M_a := \{a + b : b \in M \wedge a + b < 1\} \cup \{a + b - 1 : b \in M \wedge a + b \geq 1\}$$

Es gilt $[0,1) = \bigcup\{M_a : a \in \mathbb{Q}\cap[0,1)\}$. Für $a, b \in [0,1)\cap\mathbb{Q}$ mit $a \neq b$ ist $M_a \cap M_b = \emptyset$. Wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ gilt

$$1 = \mu([0,1)) = \sum_{a\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} \mu(M_a) = \sum_{a\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} \varepsilon.$$

Das führt aber sowohl im Falle $\varepsilon = 0$ als auch im Falle $\varepsilon > 0$ zu einem Widerspruch. $\square$

## 6. Kardinalzahlen

Wir definieren in diesem Abschnitt die Klasse Card der Kardinalzahlen als Teilklasse von Ord. Für endliche Mengen $x$ haben wir bereits die Mächtigkeit $|\,x\,|$ definiert. Im endlichen Falle ist $|x|$ eine natürliche Zahl und damit insbesondere eine Ordinalzahl. Analog werden wir jeder unendlichen Menge $x$ eine bestimmte Ordinalzahl $|x|$ zuordnen, so dass es eine Bijektion zwischen $x$ und $|x|$ gibt. Anders als im endlichen Fall ist jedoch eine Ordinalzahl $\alpha$ noch nicht dadurch eindeutig bestimmt, dass es eine Bijektion zwischen $x$ und $\alpha$ gibt.

Wir stellen zunächst ein paar Betrachtungen über die Existenz von Bijektionen zwischen Mengen an, die ohne den Begriff „Kardinalzahl“ auskommen.

**Lemma 6.1.** *Sei $x$ eine Menge. Dann gibt es ein injektives $f : x \to \mathcal{P}(x)$ und ein bijektives $g : \mathcal{P}(x) \to {}^x2$, aber kein surjektives $h : x \to \mathcal{P}(x)$.*

*Beweis.* Für $z \in x$ sei $f(z) := \{z\}$. Offenbar ist $f : x \to \mathcal{P}(x)$ injektiv.

Für jedes $y \subseteq x$ sei $g(y)$ die charakteristische Funktion von $y$ als Teilmenge von $x$. Für jedes $z \in x$ sei also

$$g(y)(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z \in y \text{ und} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass $g : \mathcal{P}(x) \to {}^x2$ bijektiv ist.

Sei $h : x \to \mathcal{P}(x)$ eine Funktion. Wir zeigen, dass $h$ nicht surjektiv ist. Setze nämlich $y := \{z \in x : z \notin h(z)\}$. Dann ist $y$ nicht im Bild von $h$.

Angenommen doch. Sei $z \in x$ so, dass $h(z) = y$ gilt. Ist $z \in y$, so folgt nach Definition von $y$, dass $z$ kein Element von $h(z) = y$ ist. Ein Widerspruch. Ist $z \notin h(z)$, so gilt $z \in y = h(z)$ nach Definition von $y$. Auch ein Widerspruch. Damit ist $y$ nicht im Bild von $h$, also $h$ nicht surjektiv. $\square$

**Satz 6.2** (Cantor-Bernsteinscher Äquivalenzsatz)**.** *Seien $A$ und $C$ Mengen und $g : A \to C$ und $h : C \to A$ injektiv. Dann gibt es eine Bijektion zwischen $A$ und $C$.*

*Beweis.* Setze $B := h[C]$. Da $h$ die Menge $C$ bijektiv auf $B$ abbildet, genügt es für den Beweis des Satzes, eine Bijektion $\varphi : A \to B$ anzugeben.

Setze $f := h \circ g : A \to A$. Es gilt $f[A] \subseteq B \subseteq A$. Für $n \in \omega$ seien $A_n, B_n \subseteq A$ definiert durch

$$A_0 := A, \quad B_0 := B, \quad A_{n+1} := f[A_n] \text{ und } B_{n+1} := f[B_n].$$

Es gilt

$$A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq \dots$$

Das folgt mittels vollständiger Induktion aus $A_0 = A \supseteq B = B_0 \supseteq f[A] = A_1$. Setze nun

$$R := \bigcap_{n\in\omega} A_n \quad \left(= \bigcap_{n\in\omega} B_n\right).$$

Für alle $n \in \omega$ ist

$$f[A_n \setminus B_n] = f[A_n] \setminus f[B_n] = A_{n+1} \setminus B_{n+1}.$$

Damit ist $f \restriction \bigcup_{n\in\omega}(A_n \setminus B_n)$ eine Bijektion auf $\bigcup_{n\in\omega}(A_{n+1} \setminus B_{n+1})$. Setze

$$\varphi := \mathrm{id}_{R\cup\bigcup_{n\in\omega}(B_n\setminus A_{n+1})} \cup \left( f \restriction \bigcup_{n\in\omega}(A_n \setminus B_n)\right).$$

Da die Vorbereiche der Funktionen, die zu $\varphi$ vereinigt werden, eine Partition von $A$ bilden, ist $\varphi$ eine Funktion mit $\mathrm{vb}\,\varphi = A$. Die Bilder der Funktionen, die zu $\varphi$ vereinigt werden, bilden eine Partition von $B$. Damit ist $\varphi$ eine Bijektion zwischen $A$ und $B$, wie gewünscht. □

**Definition 6.3.** Zwei Mengen $x$ und $y$ heißen *gleichmächtig* ($x \approx y$), wenn eine Bijektion zwischen ihnen existiert.

Eine Ordinalzahl $\kappa$ heißt *Kardinalzahl*, wenn es keine Ordinalzahl $\alpha < \kappa$ mit $\alpha \approx \kappa$ gibt. Die Klasse der Kardinalzahlen wird mit Card bezeichnet.

**Lemma 6.4.** *a) Jede natürliche Zahl ist Kardinalzahl. Die Ordinalzahl $\omega$ ist Kardinalzahl.*

*b) Jede unendliche Kardinalzahl ist Limesordinalzahl.*

*c) Ist $M$ eine Menge von Kardinalzahlen, so ist die Ordinalzahl* $\sup M$ *eine Kardinalzahl. (Dabei bezieht sich* sup *auf das Supremum in der Klasse der Ordinalzahlen.)*

*Beweis.* a) Ist $n$ eine natürliche Zahl und $\alpha < n$, so gilt $\alpha \not\approx n$ nach Lemma 4.62. Damit ist $n$ Kardinalzahl.

Sei nun $\alpha < \omega$. Dann ist $\alpha$ eine natürliche Zahl. Nach Lemma 4.62 gilt wieder $\alpha \not\approx \omega$. Damit ist auch $\omega$ eine Kardinalzahl.

b) Sei $\alpha$ eine unendliche Ordinalzahl, die keine Limesordinalzahl ist. Dann existiert eine Ordinalzahl $\beta < \alpha$ mit $\alpha = \beta+1$. Wir zeigen, dass $\alpha$ und $\beta$ gleichmächtig sind. Damit ist $\alpha$ keine Kardinalzahl.

Da $\alpha$ unendlich ist, ist auch $\beta$ unendlich. Die natürlichen Zahlen sind also ein Anfangsstück von $\alpha$ und $\beta$. Sei $f : \beta \to \alpha$ wie folgt definiert:

$$f(\gamma) := \begin{cases} \gamma, & \text{falls } \gamma \geq \omega, \\ \gamma - 1, & \text{falls } \gamma \in \omega \setminus \{0\} \text{ und} \\ \beta, & \text{falls } \gamma = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist $f$ bijektiv.

c) Sei $M$ eine Menge von Kardinalzahlen und $\kappa := \sup M$. Ist $M = \emptyset$, so ist $\kappa = 0$ und damit, nach $a$), Kardinalzahl. Also können wir annehmen, dass $M$ nicht leer ist.

Sei $\alpha < \kappa$. Angenommen, es gibt eine Bijektion $f : \kappa \to \alpha$. Wegen $\alpha < \kappa$ existiert ein $\lambda \in M$ mit $\alpha < \lambda$. Die Funktion $f \restriction \lambda$ ist eine Injektion von $\lambda$ nach $\alpha$. Offenbar ist $\mathrm{id}_\alpha$ eine Injektion von $\alpha$ nach $\lambda$. Nach Satz 6.2 sind $\alpha$ und $\lambda$ damit gleichmächtig. Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass mit allen Elementen von $M$ auch $\lambda$ eine Kardinalzahl ist. □

Für jede wohlgeordnete Menge $(x, <)$ ist das Mostowski-Bild von $x$ eine Ordinalzahl $\alpha$. Da der Mostowski-Isomorphismus zwischen $x$ und $\alpha$ eine Bijektion ist, gilt $\alpha \approx x$. Nach Satz 5.3 lässt sich unter (AC) jede Menge wohlordnen. Also ist jede Menge mit einer Ordinalzahl gleichmächtig. Damit ist folgende Definition sinnvoll:

**Definition 6.5.** Für jede Menge $x$ sei $|\,x\,|$ die kleinste Ordinalzahl, die mit $x$ gleichmächtig ist.

**Lemma 6.6.** *a) Für jede Menge $x$ ist $|x|$ eine Kardinalzahl. Außerdem ist $|x|$ die einzige Kardinalzahl, die mit $x$ gleichmächtig ist (aber im unendlichen Fall nicht die einzige Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft).*

*b) Für jede Kardinalzahl $\kappa$ ist $|\kappa| = \kappa$.*

*Beweis.* a) Sei $\alpha < |x|$. Da $|x|$ die kleinste Ordinalzahl $\beta$ mit $\beta \approx x$ ist, gibt es keine Bijektion zwischen $\alpha$ und $|x|$. Damit ist $|x|$ eine Kardinalzahl. Sei $\kappa$ eine weitere Kardinalzahl mit $\kappa \approx x$. Dann gilt $\kappa \approx |x|$. Nachdem, was wir eben bemerkt haben, ist $|x| \leq \kappa$. Da $\kappa$ eine Kardinalzahl ist, folgt $|x| = \kappa$.

b) folgt unmittelbar aus der Definition einer Kardinalzahl. $\square$

**Lemma 6.7.** *Seien $x$ und $y$ Mengen, $x \neq \emptyset$.*

*a) $|x| = |y|$ gilt genau dann, wenn es eine Bijektion zwischen $x$ und $y$ gibt.*

*b) Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $|x| \leq |y|$
(2) *Es gibt eine Injektion $f : x \to y$.*
(3) *Es gibt eine Surjektion $g : y \to x$.*

*Beweis.* a) Angenommen $|x| = |y|$. Dann ist $x \approx |x| = |y| \approx y$, also $x \approx y$. Sei umgekehrt $x \approx y$. Dann gilt $|x| \approx x \approx y$, also $|x| \approx y$. Nach Lemma 6.6 ist damit $|x| = |y|$.

b) (1)⇒(2): Sei $|x| \leq |y|$. Fixiere Bijektionen $b_0 : x \to |x|$ und $b_1 : |y| \to y$. Sei $e : |x| \to |y|$ die Identität. Dann ist $b_1 \circ e \circ b_0 : x \to y$ injektiv.

(2)⇒(1): Sei $f : x \to y$ injektiv. Angenommen, $|y| < |x|$. Dann existiert eine Injektion $e : y \to x$. Nach Satz 6.2 gilt $x \approx y$ und damit $|x| = |y|$, ein Widerspruch.

(2)⇒(3): Sei $f : x \to y$ injektiv. Wegen $x \neq \emptyset$ existiert ein $z \in x$. Definiere $g : y \to x$ wie folgt:

Für alle $a \in \operatorname{nb} f$ sei $g(a) := f^{-1}(a)$. Für alle $a \in y \setminus \operatorname{nb} f$ sei $g(a) := z$. Wegen $x \subseteq \operatorname{vb} f \subseteq \operatorname{nb} g$ ist $g$ surjektiv.

(3)⇒(2): Sei $g : y \to x$ surjektiv. Sei $f$ eine Auswahlfunktion für die Familie $(g^{-1}[\{z\}])_{z \in x}$. Dann ist $f : x \to y$ injektiv. $\square$

Nach Lemma 6.1 gibt es für jede Menge $x$ zwar eine Injektion von $x$ nach $\mathcal{P}(x)$, aber keine Bijektion. Damit ist $|x| < |\mathcal{P}(x)|$. Insbesondere gibt es zu jeder Kardinalzahl eine echt größere Kardinalzahl. Das rechtfertigt folgende Definition:

**Definition 6.8.** Für jede Kardinalzahl $\kappa$ sei

$$\kappa^+ := \min\{\mu \in \mathrm{Card} : \kappa < \mu\}.$$

Wir definieren eine Funktion $\aleph : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Card}$, die die unendlichen Kardinalzahlen streng monoton aufzählt. ($\aleph$, gesprochen *aleph*, ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.) Anstelle von $\aleph(\alpha)$ schreibt man $\aleph_\alpha$.

Setze $\aleph_0 := \omega$. Ist $\aleph_\alpha$ bereits definiert, so sei $\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$. Ist $\delta$ eine Limesordinalzahl und ist $\aleph_\alpha$ bereits definiert für alle $\alpha < \delta$, so sei $\aleph_\delta := \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \delta\}$.

Es ist klar, dass $\aleph : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Card}$ streng monoton ist. Damit ist $\aleph[\mathrm{Ord}]$ eine echte Klasse. Für jede unendliche Kardinalzahl $\kappa$ gibt es eine Ordinalzahl $\alpha$ mit $\kappa = \aleph_\alpha$.

Andernfalls sei $\kappa$ die kleinste unendliche Kardinalzahl, die nicht von der Form $\aleph_\alpha$ für ein $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist. Wegen $\aleph_0 = \omega$ ist $\aleph_0 < \kappa$. Mittels transfiniter Induktion sieht man leicht, dass für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$ gilt: $\aleph_\alpha < \kappa$. Damit ist $\aleph[\mathrm{Ord}] \subseteq \kappa$. Das widerspricht aber der oben getroffenen Feststellung, dass $\aleph[\mathrm{Ord}]$ eine echte Klasse ist.

Damit ist

$$\mathrm{Card} \setminus \omega = \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}.$$

**Definition 6.9.** Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ heißt *Nachfolgerkardinalzahl*, falls $\alpha$ eine Nachfolgerordinalzahl ist, und *Limeskardinalzahl*, falls $\alpha$ eine Limesordinalzahl ist.

**Übung 6.1.** *a) Eine Menge $x$ heißt* abzählbar*, falls $|x| \leq \aleph_0$ ist. Sei $\alpha$ eine abzählbare Limesordinalzahl. Zeige, dass es eine streng monoton wachsende Folge $(\beta_n)_{n \in \omega}$ mit $\alpha = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$ gibt.*

*Hinweis: Da $\alpha$ Limesordinalzahl ist, ist $\alpha \neq \emptyset$. Man nehme eine Surjektion von $\omega$ auf $\alpha$ her und konstruiere zunächst eine Folge $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ in $\alpha$ mit $\alpha = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$, die nur monoton wächst.*

*b) Ist $(X, <)$ eine wohlgeordnete Menge und $Y \subseteq X$, so ist*

$$\mathrm{otp}(Y, <) \leq \mathrm{otp}(X, <).$$

**Übung 6.2.** *Zeige, dass es für jede abzählbare Ordinalzahl $\alpha$ eine streng monotone Funktion $f : (\alpha, \in) \to (\mathbb{R}, <)$ gibt.*

*Hinweis: Benutze transfinite Induktion. Man beachte, dass $((0, 1), <)$ zu $(\mathbb{R}, <)$ isomorph ist. Ist $\alpha$ eine abzählbare Limesordinalzahl, so gibt es nach Übung 6.1 a) eine streng monoton wachsende Folge $(\beta_n)_{n\in\omega}$ mit $\alpha = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$. Nach Übung 6.1 b) ist für jedes $n \in \omega$ das Intervall*

$$[\beta_n, \beta_{n+1}) = \{\gamma \in \mathrm{Ord} : \beta_n \leq \gamma < \beta_{n+1}\}$$

*isomorph zu einer Ordinalzahl $\leq \beta_{n+1}$.*

6.1. **Kardinalzahlarithmetik.** In diesem Abschnitt definieren wir für Kardinalzahlen $\kappa$ und $\lambda$ die Kardinalzahlen $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$ und $\kappa^\lambda$. Trotz gleicher Schreibweise haben die Kardinalzahloperationen $+$ und $\cdot$ nichts mit den früher definierten Ordinalzahloperationen zu tun.

**Definition 6.10.** Seien $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$. Weiter seien $A$ und $B$ disjunkte Mengen mit $|A| = \kappa$ und $|B| = \lambda$. Setze

$$\kappa + \lambda := |A \cup B|, \qquad \kappa \cdot \lambda := |A \times B|, \qquad \kappa^\lambda := |{}^B A|\ .$$

Es ist klar, dass diese Definitionen von der Wahl von $A$ und $B$ unabhängig sind.

Wir werden demnächst sehen, dass sich Summe und Produkt unendlicher Kardinalzahlen sehr einfach berechnen lassen. Potenzen $\kappa^\lambda$ lassen sich in ZFC jedoch so gut wie gar nicht berechnen. Im Allgemeinen kann man nur gewisse untere Schranken für $\kappa^\lambda$ angeben.

**Lemma 6.11.** *Seien $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$.*

*a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$*

*b) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$, $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$*

*c) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$*

*d) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$*

*e) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$*

*f) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$*

*g) Sind $\kappa', \lambda' \in \mathrm{Card}$ mit $\kappa' \leq \kappa$ und $\lambda' \leq \lambda$, so gilt $\kappa' + \lambda' \leq \kappa + \lambda$, $\kappa' \cdot \lambda' \leq \kappa \cdot \lambda$ und ${\kappa'}^{\lambda'} \leq \kappa^\lambda$.*

*Beweis.* c) Seien $A$, $B$ und $C$ paarweise disjunkte Mengen mit $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ und $|C| = \mu$. Wie man leicht nachrechnet, ist $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$. Das zeigt $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

d) Seien $A$, $B$ und $C$ wie oben. Weiter seien $\pi_A : A \times B \to A$ und $\pi_B : A \times B \to B$ die Projektionen auf $A$ und $B$. Für eine Funktion $f : C \to A \times B$ sei $f_A := \pi_A \circ f$ und $f_B := \pi_B \circ f$. Die Abbildung $f \mapsto (f_A, f_B)$ ist eine Bijektion zwischen ${}^C(A \times B)$ und ${}^C A \times {}^C B$. Das zeigt $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

e) Seien $A$, $B$ und $C$ wie oben. Die Abbildung $(f, g) \mapsto f \cup g$ ist eine Bijektion von ${}^B A \times {}^C A$ nach ${}^{B\cup C} A$. Das zeigt $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.

f) Sei $f : C \to {}^B A$ eine Funktion. Die Funktion $f$ induziert eine Funktion $h(f) : B \times C \to A; (b, c) \mapsto f(c)(b)$. Die Funktion $h$ ist eine Bijektion zwischen ${}^C({}^B A)$ und ${}^{C\times B} A$. Das zeigt $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

g) Seien $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$. Beachte, dass $A'$ und $B'$ automatisch disjunkt sind. Es gilt $A' \cup B' \subseteq A \cup B$ und $A' \times B' \subseteq A \times B$. Das zeigt $\kappa' + \lambda' \leq \kappa + \lambda$ und $\kappa' \cdot \lambda' \leq \kappa \cdot \lambda$.

Um ${\kappa'}^{\lambda'} \leq \kappa^\lambda$ zu zeigen, können wir annehmen, dass $\kappa > 0$ ist. Damit ist $A \neq \emptyset$. Wähle eine Funktion $g : B \setminus B' \to A$. Die Abbildung $f \mapsto f \cup g$ ist eine Injektion von ${}^{B'}A'$ nach ${}^{B}A$. Das zeigt ${\kappa'}^{\lambda'} \leq \kappa^\lambda$. □

Als nächstes wollen wir für unendliche Kardinalzahlen $\kappa$ und $\lambda$ Summe und Produkt tatsächlich berechnen. Dazu benutzen wir die im Folgenden definierte Relation $\prec$ auf $\mathrm{Ord}^2$.

**Definition 6.12.** Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ sei $\max(\alpha, \beta)$ die größere der beiden Ordinalzahlen. Wir definieren eine Relation $\prec$ auf $\mathrm{Ord}^2$ durch

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) \prec (\gamma,\delta) \quad :\Leftrightarrow \quad & \max(\alpha,\beta) < \max(\gamma,\delta) \vee \\ & (\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) \wedge \alpha < \gamma) \vee \\ & (\max(\alpha,\beta) = \max(\gamma,\delta) \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta)\end{aligned}$$

**Lemma 6.13.** *Die Relation $\prec$ ist eine Wohlordnung auf* $\mathrm{Ord}^2$.

*Beweis.* Zunächst stellen wir fest, dass man $\prec$ auch wie folgt auffassen kann:

Betrachte die lexikographische Ordnung $<_{lex}$ auf $\mathrm{Ord}^3$. Diese Ordnung erhält man, indem man zunächst das lexikographische Produkt von Ord und Ord bildet und dann noch einmal das lexikographische Produkt dieser neuen Ordnung mit Ord. $(\mathrm{Ord}^3, <_{lex})$ ist zwar keine Wohlordnung, da echte Anfangsstücke keine Mengen sein müssen, aber jede nichtleere Teilklasse von $\mathrm{Ord}^3$ hat ein $<_{lex}$ kleinstes Element, und $<_{lex}$ ist linear. Das zeigt man genauso wie für lexikographische Produkte wohlgeordneter Mengen.

Betrachte nun die Injektion

$$e : \mathrm{Ord}^2 \to \mathrm{Ord}^3; (\alpha, \beta) \mapsto (\max(\alpha, \beta), \alpha, \beta).$$

Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{Ord}$ gilt $(\alpha, \beta) \prec (\gamma, \delta)$ genau dann, wenn $e(\alpha, \beta) <_{lex} e(\gamma, \delta)$ ist. Damit ist $\prec$ eine lineare Ordnung, und jede nichtleere Teilklasse von $\mathrm{Ord}^2$ hat ein $\prec$-minimales Element.

Es bleibt zu zeigen, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ die Klasse

$${}_{\prec}(\alpha, \beta) = \{(\gamma, \delta) \in \mathrm{Ord}^2 : (\gamma, \delta) \prec (\alpha, \beta)\}$$

eine Menge ist.

Für alle $\gamma, \delta \in \mathrm{Ord}$ mit $(\gamma, \delta) \prec (\alpha, \beta)$ gilt $\max(\gamma, \delta) \leq \max(\alpha, \beta)$. Damit ist ${}_{\prec}(\alpha, \beta) \subseteq (\max(\alpha, \beta) + 1) \times (\max(\alpha, \beta) + 1)$, also eine Menge. □

**Definition 6.14.** Da $(\mathrm{Ord}, <)$ und $(\mathrm{Ord}^2, \prec)$ echte wohlgeordnete Klassen sind, sind sie isomorph. Damit gibt es genau einen Isomorphismus

$$K : (\mathrm{Ord}^2, \prec) \to (\mathrm{Ord}, <).$$

Für jede Ordinalzahl $\nu$ ist $\nu \times \nu$ ein echtes Anfangsstück von $(\mathrm{Ord}^2, \prec)$. Damit ist $K[\nu \times \nu]$ ein echtes Anfangsstück von $(\mathrm{Ord}, <)$. Es gibt also eine Ordinalzahl $k(\nu)$ mit $K[\nu \times \nu] = k(\nu)$.

Es ist klar, dass die Abbildung $k : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ streng monoton ist. Damit gilt für alle $\nu \in \mathrm{Ord}$: $\nu \leq k(\nu)$.

**Satz 6.15.** *Sei $\kappa$ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt*

*a)* $K(\kappa \times \kappa) = k(\kappa) = \kappa$

*b)* $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

*Beweis.* Aus $k(\kappa) = \kappa$ folgt $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, da $K \upharpoonright \kappa \times \kappa$ dann eine Bijektion zwischen $\kappa \times \kappa$ und $\kappa$ ist. Das zeigt b) mit Hilfe von a).

Wir zeigen a) durch Induktion über $\kappa$. Wegen $\kappa \leq k(\kappa)$ brauchen wir jeweils nur $k(\kappa) \leq \kappa$ zu zeigen.

Sei $\kappa = \omega$. Es gilt

$$K[\omega \times \omega] = \bigcup_{n \in \omega} K[n \times n].$$

Für jedes $n \in \omega$ ist $K[n \times n]$ endlich und damit eine natürliche Zahl. Es folgt $k(\omega) \leq \omega$.

Sei nun $\kappa$ eine unendliche Kardinalzahl $> \omega$. Für alle unendlichen Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ gelte $k(\lambda) = \lambda$ und damit $\lambda \cdot \lambda = \lambda$. Da $\kappa$ eine Limesordinalzahl ist, gilt $\kappa = \bigcup\{\alpha < \kappa : \alpha \geq \omega\}$. Für jedes unendliche $\alpha < \kappa$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$|k(\alpha)| = |K[\alpha \times \alpha]| = |\alpha| \cdot |\alpha| = |\alpha| \; .$$

Es ist

$$k(\kappa) = K[\kappa \times \kappa] = \bigcup_{\omega \leq \alpha < \kappa} K[\alpha \times \alpha] = \bigcup_{\omega \leq \alpha < \kappa} k(\alpha).$$

Angenommen $k(\kappa) > \kappa$. Dann existiert $\alpha < \kappa$ mit $\kappa \leq k(\alpha)$. Wegen $|k(\alpha)| = |\alpha|$ gibt es eine Injektion von $\kappa$ nach $\alpha$. Wegen $\alpha < \kappa$ gibt es nach dem Satz von Cantor und Bernstein eine Bijektion zwischen $\alpha$ und $\kappa$. Das kann aber nicht sein, da $\kappa$ eine Kardinalzahl ist. Damit gilt in der Tat $k(\kappa) = \kappa$. □

**Korollar 6.16.** *Seien $\kappa$ und $\lambda$ Kardinalzahlen und mindestens eine der beiden unendlich. Dann gilt $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Sind $\kappa$ und $\lambda$ außerdem von $0$ verschieden, so gilt $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei $\kappa \leq \lambda$ und damit $\lambda \geq \omega$. Dann gilt

$$\lambda = 0 + \lambda \leq \kappa + \lambda \leq 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

Ist $\kappa \neq 0$, so gilt außerdem

$$\lambda = 1 \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

□

**Korollar 6.17.** *Für jede unendliche Kardinalzahl $\kappa$ und alle $n \in \omega \setminus \{0\}$ gilt $\kappa^n = \kappa$.*

**Korollar 6.18.** *Sind $\kappa$ und $\lambda$ Kardinalzahlen mit $2 \leq \lambda \leq 2^\kappa$ und $\kappa \geq \omega$, so gilt $\lambda^\kappa = 2^\kappa$. Insbesondere ist $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.*

*Beweis.* $2^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$ □

Potenzen $\kappa^\lambda$ von unendlichen Kardinalzahl lassen sich im Allgemeinen nicht leicht berechnen. Da es für keine Menge $x$ eine Surjektion von $x$ auf $\mathcal{P}(x)$ gibt, gilt $\kappa < 2^\kappa$ und damit $\kappa^+ \leq 2^\kappa$ für jedes $\kappa \in \mathrm{Card}$.

Abgesehen von recht einfachen Schranken lässt sich in ZFC kaum etwas über den Wert von $2^\kappa$ für unendliches $\kappa$ sagen.

Die Aussage „$2^{\aleph_0} = \aleph_1$“ heißt (*spezielle*) *Kontinuumshypothese* (CH). Die Aussage „$\forall \kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega (2^\kappa = \kappa^+)$“ ist die *allgemeine Kontinuumshypothese* (GCH). Weder GCH (bzw. CH) noch $\neg$GCH (bzw. $\neg$CH) lassen sich in ZFC beweisen.

## 7. Der Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die syntaktische Folgerungrelation $\vdash$ mit der der semantischen $\models$ übereinstimmt. Das ist der sogenannte *Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik*. Eine zentrale Rolle beim Beweis des Vollständigkeitssatzes spielen

### 7.1. **Widerspruchsfreie Theorien.**

**Definition 7.1.** Sei $T$ eine Theorie über dem Vokabular $\tau$. $T$ heißt (*syntaktisch*) *widerspruchsvoll*, wenn für jede Formel $\varphi$ über $\tau$ gilt: $T \vdash \varphi$. Sonst heißt $T$ (*syntaktisch*) *widerspruchsfrei.*

**Lemma 7.2.** *Eine Theorie $T$ ist genau dann widerspruchsvoll, wenn gilt: $T \vdash \bot$. Dabei ist $\bot$ ein Zeichen für eine Formel, die immer falsch ist, also zum Beispiel $\alpha \wedge \neg\alpha$.*

*Beweis.* Ist $T$ widerspruchsvoll, so gilt $T \vdash \varphi$ für jede Formel $\varphi$, insbesondere für $\varphi = \bot$. Angenommen, es gilt $T \vdash \bot$. Sei $\varphi$ eine Formel. Dann ist $\bot \to \varphi$ prädikatenlogische Tautologie und damit Axiom unseres Kalküls. Mit Modus Ponens ergibt sich $T \vdash \varphi$. □

**Lemma 7.3.** *Hat $T$ ein Modell, so ist $T$ widerspruchsfrei.*

*Beweis.* Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur mit $\mathcal{A} \models T$. Angenommen, $T \vdash \bot$. Nach dem Korrektheitssatz (Satz 3.33) gilt dann $\mathcal{A} \models \bot$. Das ist aber unmöglich. □

Der wesentliche Beweisschritt im Beweis des Vollständigkeitssatzes wird die Umkehrung von Lemma 7.3 sein.

**Lemma 7.4.** *Sei $T$ eine Theorie (über $\tau$).*

*a) Mit $T$ ist auch jede Teilmenge von $T$ widerspruchsfrei.*

*b) $T$ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn jede endliche Teilmenge von $T$ widerspruchsfrei ist.*

*c) Sei $K$ eine Menge von widerspruchsfreien Theorien über $\tau$, die bezüglich $\subseteq$ linear geordnet ist. Dann ist $\bigcup K$ widerspruchsfrei.*

*d) Ist $T$ widerspruchsfrei, so gibt es eine maximal widerspruchsfreie Theorie $T'$ (über $\tau$) mit $T \subseteq T'$.*

*Beweis.* a) Sei $S \subseteq T$. Gilt $S \vdash \bot$, so auch $T \vdash \bot$.

b) Sei $T$ widerspruchsfrei. Dann ist nach a) jede Teilmenge von $T$ widerspruchsfrei, insbesondere jede endliche.

Angenommen $T$ ist widerspruchsvoll. Dann gilt $T \vdash \bot$. Es existiert also ein Beweis von $\bot$ aus $T$. In diesem Beweis kommen aber nur endlich viele Aussagen aus $T$ vor. Sei $S$ die endliche Menge der Aussagen in $T$, die in diesem Beweis vorkommen. Offenbar gilt $S \vdash \bot$. Damit hat $T$ eine endliche Teilmenge, die widerspruchsvoll ist.

c) Nach b) genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von $\bigcup K$ widerspruchsfrei ist. Sei also $S \subseteq \bigcup K$ endlich. Da $K$ bezüglich $\subseteq$ linear geordnet ist, existiert $S' \in K$ mit $S \subseteq S'$. Nach Voraussetzung ist $S'$ widerspruchsfrei, also auch $S$.

d) Betrachte

$$H := \{S : S \text{ ist widerspruchsfrei Theorie über } \tau \text{ mit } T \subseteq S\}.$$

Die Menge $H$ ist durch $\subseteq$ halbgeordnet. Nach c) hat jede linear geordnete Teilmenge $K$ von $H$ eine obere Schranke in $H$, nämlich $\bigcup K$.

Nach dem Zornschen Lemma hat $H$ ein maximales Element $T'$. □

**Lemma 7.5.** *Sei $T$ eine Theorie über $\tau$. Weiter seien $\varphi$ und $\psi$ Aussagen über $\tau$.*

*a) $T \cup \{\varphi \vee \psi\}$ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn $T \cup \{\varphi\}$ oder $T \cup \{\psi\}$ widerspruchsfrei ist.*

*b) Ist $T$ widerspruchsfrei, so ist $T \cup \{\varphi\}$ oder $T \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei.*

*Beweis.* a) Wir zeigen:

$$T \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \perp \quad \Leftrightarrow \quad T \cup \{\varphi\} \vdash \perp \text{ und } T \cup \{\psi\} \vdash \perp$$

Nach dem Deduktionstheorem (Satz 3.38) ist das äquivalent zu

$$T \vdash \varphi \vee \psi \to \perp \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \varphi \to \perp \text{ und } T \vdash \psi \to \perp.$$

Nun ist aber für jede Formel $\alpha$ die Formel $\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \to \perp)$ eine prädikatenlogische Tautologie. Es bleibt zu zeigen:

$$T \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \neg\varphi \text{ und } T \vdash \neg\psi.$$

Das ist aber leicht bei Benutzung der Tautologie

$$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

b) folgt aus a), wenn man weiß, dass für jede Aussage $\varphi$ mit $T$ auch $T \cup \{\varphi \vee \neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist. Letzteres folgt aber wie in a) mit Hilfe des Deduktionstheorems. □

**Lemma 7.6.** *Sei $T$ maximal widerspruchsfrei und $\varphi, \psi$ Aussagen.*

*a) $\varphi \in T \Leftrightarrow T \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsfrei.*

*b) $\varphi \vee \psi \in T \Leftrightarrow \varphi \in T$ oder $\psi \in T$.*

*c) $\neg\varphi \in T \Leftrightarrow \varphi \notin T$.*

*Beweis.* Folgt aus Lemma 7.5. □

**Definition und Bemerkung 7.7.** Seien $\tau = C \cup F \cup R$ und $\tau' = C' \cup F' \cup R'$ Vokabulare mit $C \subseteq C'$, $F \subseteq F'$ und $R \subseteq R'$. Jeder $\tau'$-Struktur $\mathcal{A}'$ lässt sich eine $\tau$-Struktur $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \restriction \tau$ zuordnen, die dieselbe Trägermenge wie $\mathcal{A}'$ hat und in der die Konstanten, Relationen und Funktionen aus $\tau$ so interpretiert werden wie in $\mathcal{A}'$ (man vergisst also einfach die $z^{\mathcal{A}'}$ mit $z \in \tau' \setminus \tau$). $\mathcal{A}$ heißt das *Redukt* von $\mathcal{A}'$ auf $\tau$, $\mathcal{A}'$ eine *Expansion* von $\mathcal{A}$ auf $\tau'$.

Offenbar lässt sich jede $\tau$-Struktur zu einer $\tau'$-Struktur expandieren. Ist $\mathcal{A}'$ eine Expansion von $\mathcal{A}$ auf $\tau'$ und gilt $\mathcal{A} \models T$ für eine Theorie $T$ (über $\tau$), so gilt auch $\mathcal{A}' \models T$, wobei $T$ jetzt als Theorie über $\tau'$ aufgefasst wird.

**Lemma 7.8.** *Das Vokabular $\tau'$ gehe aus $\tau$ durch Hinzufügen neuer Konstantensymbole hervor. Sei $T$ eine Theorie über $\tau$. Dann ist $T$ genau dann widerspruchsfrei über $\tau$, wenn $T$ über $\tau'$ widerspruchsfrei ist.*

*Beweis.* Nach Lemma 3.39 gilt $T \vdash \perp$ über $\tau$ genau dann, wenn $T \vdash \perp$ über $\tau'$ gilt. □

**Lemma 7.9.** *Sei $\varphi$ eine Formel über $\tau$, $T$ Theorie über $\tau$. Angenommen, es gibt einen variablenfreien Term $t$, so dass $T \cup \{\varphi(x/t)\}$ widerspruchsfrei ist. Dann ist auch $T \cup \{\exists x\varphi\}$ widerspruchsfrei.*

*Beweis.* Zu zeigen ist

$$T \cup \{\exists x\varphi\} \vdash \perp \quad \Rightarrow T \cup \{\varphi(x/t)\} \vdash \perp.$$

Angenommen $T \cup \{\exists x\varphi\} \vdash \perp$. Nach dem Deduktionstheorem (Satz 3.38) gilt $T \vdash \exists x\varphi \to \perp$. Die Formel $\varphi(x/t) \to \exists x\varphi$ ist Substitutionsaxiom. Eine prädikatenlogische Tautologie und Modus Ponens liefern $T \vdash \varphi(x/t) \to \perp$. □

**Lemma 7.10.** *Sei $\Phi$ eine Menge von Formeln über $\tau$. Weiter sei $\varphi$ eine Formel über $\tau$, $x$ eine Variable und $c$ ein Konstantensymbol, das in $\Phi$ nicht vorkommt. Gilt $\Phi \vdash \varphi(x/c)$, so auch $\Phi \vdash \varphi$.*

**Lemma 7.11.** *Sei $\Phi$ eine Menge von Formeln über $\tau$. Für jedes $\varphi \in \Phi$ sei $\mathrm{frvar}(\varphi) \subseteq \{x_\varphi\}$. Sei $T \cup \{\exists x_\varphi \varphi(x_\varphi) : \varphi \in \Phi\}$ widerspruchsfrei. Für jedes $\varphi \in \Phi$ sei $c_\varphi$ ein neues Konstantensymbol. Das Vokabular $\tau'$ enstehe aus $\tau$ durch Hinzufügen der neuen Konstantensymbole $c_\varphi$, $\varphi \in \Phi$. Ist $T \cup \{\exists x_\varphi \varphi(x_\varphi) : \varphi \in \Phi\}$ widerspruchsfrei über $\tau$, so ist $T \cup \{\varphi(x_\varphi/c_\varphi) : \varphi \in \Phi\}$ widerspruchsfrei über $\tau'$.*

*Beweis.* Angenommen,

$$T \cup \{\varphi(x_\varphi/c_\varphi) : \varphi \in \Phi\} \vdash \bot.$$

Zu zeigen ist

$$T \cup \{\exists x_\varphi \varphi : \varphi \in \Phi\} \vdash \bot.$$

Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ mit

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_n(x_{\varphi_n}/c_{\varphi_n})\} \vdash \bot.$$

Mit dem Deduktionstheorem erhält man

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_{\varphi_{n-1}}/c_{\varphi_{n-1}})\} \vdash \varphi_n(x_{\varphi_n}/c_{\varphi_n}) \to \bot.$$

Nach Lemma 7.10 gilt nun

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_{\varphi_{n-1}}/c_{\varphi_{n-1}})\} \vdash \varphi_n(x_{\varphi_n}) \to \bot.$$

Die Existenzregel liefert

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_{\varphi_{n-1}}/c_{\varphi_{n-1}})\} \vdash \exists x_{\varphi_n} \varphi_n \to \bot.$$

Eine weitere Anwendung des Deduktionstheorems ergibt

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_{\varphi_{n-1}}/c_{\varphi_{n-1}})\} \cup \{\exists x_{\varphi_n} \varphi_n\} \vdash \bot.$$

Iteriert man dieses Argument (genauer, führt man mit diesem Argument eine vollständige Induktion durch), so erhält man

$$T \cup \{\exists x_{\varphi_1} \varphi_1, \dots, \exists x_{\varphi_n} \varphi_n\} \vdash \bot.$$

Insbesondere gilt

$$T \cup \{\exists x_\varphi \varphi : \varphi \in \Phi\} \vdash \bot.$$

□

**Definition 7.12.** Eine Theorie $T$ über $\tau$ heißt *Henkin-Theorie* (bezüglich $\tau$), falls für jede Formel der Form $\exists x \varphi \in T$ eine Konstante $c \in \tau$ existiert, für die $\varphi(x/c) \in T$ gilt.

**Lemma 7.13.** *Ist $T$ maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie über $\tau$, so gilt für jede Formel $\varphi = \varphi(x)$ über $\tau$:*

$$\exists x \varphi \in T \Leftrightarrow \text{ es gibt eine Konstante } c \in \tau \text{ mit } \varphi(x/c) \in T$$

*Beweis.* Folgt sofort aus Lemma 7.6 a), Lemma 7.9, Lemma 7.11 und der Definition einer Henkin-Theorie. □

**Satz 7.14.** *Sei $T$ eine widerspruchsfreie Theorie über $\tau$. Dann gibt es ein Vokabular $\tau^*$, das aus $\tau$ durch Hinzufügen neuer Konstantensymbole entsteht, und eine maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie $T^*$ über $\tau^*$ mit $T \subseteq T^*$.*

*Beweis.* Wir definieren induktiv Vokabulare $\tau_n$ mit

$$\tau = \tau_0 \subseteq \tau_1 \subseteq \dots$$

und Theorien $T_n$ über $\tau_n$ mit

$$T \subseteq T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots,$$

so dass $T_n$ maximal widerspruchsfrei über $\tau_n$ ist.

Setze $\tau_0 := \tau$ und wähle $T_0$ maximal widerspruchsfrei über $\tau = \tau_0$ mit $T \subseteq T_0$. Das geht nach Lemma 7.4 d).

Sei nun $\tau_n$ bereits definiert und $T_n$ maximal widerspruchsfrei über $\tau_n$. Das Vokabular $\tau_{n+1}$ entstehe aus $\tau_n$ durch Hinzufügen eines neuen Konstantensymbols $c_\varphi$ für jede Formel $\varphi = \varphi(x)$ über $\tau_n$. Setze

$$T'_{n+1} := T_n \cup \{\varphi(x/c_\varphi) : \exists x\varphi \in T_n\}.$$

Nach Lemma 7.11 ist $T'_{n+1}$ widerspruchsfreie Theorie über $\tau_{n+1}$. Wähle eine maximal widerspruchsfreie Theorie $T_{n+1}$ über $\tau_{n+1}$ mit $T'_{n+1} \subseteq T_{n+1}$.

Setze schließlich $\tau^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ und $T^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Wir zeigen, dass $T^*$ maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie über $\tau^*$ ist.

Nach Lemma 7.8 sind alle $T_n$ widerspruchsfrei über $\tau*$. Nach Lemma 7.4 c) ist damit auch $T^*$ widerspruchsfrei. Sei nun $\varphi$ eine Aussage über $\tau^*$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi$ bereits Aussage über $\tau_n$ ist. Da $T_n$ maximal widerspruchsfrei ist, gilt $\varphi \in T_n \subseteq T^*$ oder $T_n \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsvoll. Im letzteren Fall ist auch $T^* \cup \{\varphi\}$ widerspruchsvoll. Das zeigt, dass $T^*$ maximal widerspruchsfrei ist.

Sei nun $\varphi = \varphi(x)$ Formel über $\tau^*$ mit $\exists_x \varphi \in T^*$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\exists x\varphi \in T_n$. Nach Wahl von $\tau_{n+1}$ und $T_{n+1}$ gibt es ein Konstantensymbol $c \in \tau_{n+1} \subseteq \tau^*$ mit $\varphi(x/c) \in T_{n+1} \subseteq T^*$. Das zeigt, dass $T^*$ Henkin-Theorie ist. □

**Korollar 7.15.** *Sei $T$ eine widerspruchsfreie Theorie über $\tau$. Dann gibt es ein Vokabular $\tau^*$, das durch Hinzufügen neuer Konstantensymbole aus $\tau$ hervorgeht, und eine maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie $T^* \supseteq T$ über $\tau^*$, so dass gilt: $||\tau^*|| = ||\tau||$*

*Beweis.* Im Beweis von Satz 7.14 setzen wir $\kappa := ||\tau||$. Induktiv lässt sich dann für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen: $||\tau_n|| = \kappa$. Ist nämlich $||\tau_n|| = \kappa$, so gilt $||\tau_{n+1}|| = \kappa$, da es nur $||\tau_n||$ Formeln über $\tau_n$ gibt. Insgesamt erhält man

$$\kappa = ||\tau|| = ||\tau_0|| \leq ||\tau^*|| \leq \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

Insbesondere gilt $||\tau^*|| = \kappa$.

□

7.2. **Beweis des Vollständigkeitssatzes.**

**Definition 7.16.** Sei $\tau = C \cup F \cup R$ ein Vokabular. Eine $\tau$-Struktur $\mathcal{A} = (A, \dots)$ heißt *kanonisch*, falls $A = \{c^{\mathcal{A}} : c \in C\}$ gilt.

**Satz 7.17.** *Jede maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie $T$ über $\tau = C \cup F \cup R$ hat (bis auf Isomorphie genau) ein kanonisches Modell.*

**Korollar 7.18.** *Jede widerspruchsfreie Theorie $T$ über einem Vokabular $\tau$ hat ein Modell einer Mächtigkeit $\leq ||\tau||$.*

*Beweis.* Nach Korollar 7.15 existieren ein Vokabular $\tau^* \supseteq \tau$ und eine maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie $T^* \supseteq T$ mit $|\tau^*| \leq ||\tau||$. Nach Satz 7.17 hat $T^*$ ein kanonisches Modell $\mathcal{A} = (A, \dots)$. Wegen der Kanonizität von $\mathcal{A}$ gilt $|A| \leq |\tau^*| \leq ||\tau||$.
□

**Korollar 7.19** (Vollständigkeitssatz)**.** *Sei $T$ eine Theorie über $\tau$ und $\alpha$ eine Formel über $\tau$. Dann gilt*

$$T \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \alpha.$$

*Beweis.* Nach dem Korrektheitssatz (Satz 3.33) gilt

$$T \vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad T \models \alpha.$$

Gelte nun $T \not\vdash \alpha$. Dann ist $T \cup \neg\alpha$ widerspruchsfrei und hat nach Korollar 7.18 ein Modell $\mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{A} \models \neg\alpha$ gilt $\mathcal{A} \not\models \alpha$. Das zeigt $T \not\models \alpha$. □

*Beweis von Satz 7.17.* Sei $T$ maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie über dem Vokabular $\tau = C \cup F \cup R$. Wir konstruieren ein kanonisches Modell $\mathcal{A} = (A, \dots)$ von $T$.

Als unterliegenden Menge $A$ wählen wir $C/\sim$, wobei $\sim$ die wie folgt definierte Äquivalenzrelation ist:

$$c \sim d \quad :\Leftrightarrow \quad c \equiv d \in T$$

Wir zeigen zunächst, dass $\sim$ Äquivalenzrelation auf $C$ ist. Seien $c, d, e \in C$. Die identitätlogischen Axiome zusammen mit Lemma 3.35 und Lemma 3.36 zeigen, dass folgende Aussagen schon aus der leeren Theorie ableitbar sind:

(1) $c \equiv c$
(2) $c \equiv d \to d \equiv c$
(3) $(c \equiv d \wedge d \equiv e) \to c \equiv e$

Da $T$ maximal widerspruchsfrei ist, sind diese Aussagen bereits Elemente von $T$. Insbesondere gilt $c \sim c$.

Ist $c \sim d$, so ist $c \equiv d \in T$. Die mit Modus Ponens folgt aus (2) $T \vdash d \equiv c$. Da $T$ maximal widerspruchsfrei ist, gilt $d \equiv c \in T$, also $d \sim c$.

Gelte nun $c \sim d$ und $d \sim e$. Dann sind $c \equiv d$ und $d \equiv e$ Elmente von $T$. (3) zusammen mit den üblichen Ableitungstricks liefert $T \vdash c \equiv e$ und damit $c \equiv e \in T$. Es folgt $c \sim e$. Das zeigt, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist.

Die Interpretation der Konstantensymbole auf $A = C/\sim$ ist die naheliegende: für $c \in C$ sei $c^{\mathcal{A}} := [c]$, wobei $[c]$ die $\sim$-Äquivalenzklasse von $c$ bezeichnet.

Als Nächstes definieren wir die Interpretationen der Relationssymbole. Sei $r \in R$ ein $n$-stelliges Relationssymbol. Setze

$$r^{\mathcal{A}} := \{([c_1], \dots, [c_n]) : c_1, \dots, c_n \in C \text{ und } r(c_1, \dots, c_n) \in T\}.$$

Wir müssen zeigen, dass $r^{\mathcal{A}}$ wohldefiniert ist.

Seien $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in C$, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $c_i \sim d_i$. Wir zeigen

$$(*) \quad r(c_1, \dots, c_n) \in T \quad \Leftrightarrow \quad r(d_1, \dots, d_n) \in T.$$

Die identitätslogischen Axiome zusammen mit Lemma 3.35 und Lemma 3.36 liefern die Ableitbarkeit von

$$(c_1 \equiv d_1 \wedge \dots \wedge c_n \equiv d_n) \to (r(c_1, \dots, c_n) \to r(d_1, \dots, d_n)).$$

Wegen der maximalen Widerspruchsfreiheit von $T$ ist diese Aussage schon Element von $T$. Nach Wahl der $c_i$ und $d_i$ gilt

$$c_1 \equiv d_1, \dots, c_n \equiv d_n \in T.$$

Mit den üblichen Ableitungstricks (prädikatenlogische Tautologien und Modus Ponens) erhält man

$$T \vdash r(c_1, \dots, c_n) \to r(d_1, \dots, d_n).$$

Ist nun $r(c_1, \dots, c_n) \in T$, so gilt mittels Modus Ponens $T \vdash r(d_1, \dots, d_n)$ und damit $r(d_1, \dots, d_n) \in T$. Die Rückrichtung von $(*)$ erhält man analog.

Die Interpretationen der Funktionssymbole definieren wir ähnlich wie bei den Relationssymbolen. Sei $f \in F$ ein $n$-stelliges Funktionssymbol und seien $c_1, \dots, c_n \in$

$C$. Sei $t$ der Term $f(c_1, \dots, c_n)$. Das Axiom $x \equiv x$ zusammen mit Lemma 3.35 und Lemma 3.36 liefert $\vdash t \equiv t$. Sei $\alpha$ die Formel $x \equiv t$. Das Substitutionsaxiom

$$\alpha(x/t) \to \exists x\alpha$$

lautet ausgeschrieben

$$t \equiv t \to \exists xx \equiv f(c_1, \dots, c_n).$$

Eine Anwendung von Modus Ponens liefert $T \vdash \exists xx \equiv f(c_1, \dots, c_n)$. Es folgt $\exists xx \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$.

Da $T$ eine Henkin-Theorie ist, existiert ein Konstantensymbol $d \in C$ mit $d \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$. Setze

$$f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) := [d].$$

Wie im Falle der Relationssymbole zeigt man, dass $f^{\mathcal{A}}$ wohldefiniert ist. Damit ist die Definition der Struktur $\mathcal{A}$ abgeschlossen. Es bleibt $\mathcal{A} \models T$ nachzurechnen.

Zunächst zeigen wir für jeden variablenfreien Term $t$:

$$d \equiv t \in T \quad \Leftrightarrow \quad [d] = t^{\mathcal{A}}$$

Wir benutzen Induktion über den Termaufbau. Ist $t$ ein Konstantensymbol, so folgt die Behauptung aus der Definition und den Eigenschaften von $\sim$.

Sei nun $t$ von der Form $f(t_1, \dots, t_n)$, die $t_i$ variablenfrei. Angenommen, $d \equiv t \in T$. Dann existieren $c_i \in C$ mit $[c_i] = t_i^{\mathcal{A}}$ für alle $i$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $c_i \equiv t_i \in T$ für alle $i$. Es gilt

$$\vdash (c_1 \equiv t_1 \wedge \dots \wedge c_n \equiv t_n) \to f(t_1, \dots, t_n) \equiv f(c_1, \dots, c_n).$$

Das liefert

$$T \vdash f(c_1, \dots, c_n) \equiv f(t_1, \dots, t_n).$$

Wegen $d \equiv t \in T$ und der maximalen Widerspruchsfreiheit von $T$ erhalten wir $d \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$. Nach Definition von $f^{\mathcal{A}}$ ist

$$[d] = f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \dots, t_n^{\mathcal{A}}) = t^{\mathcal{A}}.$$

Angenommen, $[d] = t^{\mathcal{A}}$. Wähle $c_1, \dots, c_n$ wie oben mit $[c_i] = t_i^{\mathcal{A}}$ für alle $i$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $c_i \equiv t_i \in T$ für alle $i$. Es gilt $[d] = f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_1])$. Nach Definition von $f^{\mathcal{A}}$ ist $d \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$. Wie oben sieht man

$$f(c_1, \dots, c_n) \equiv f(t_1, \dots, t_n) \in T.$$

Es folgt $d \equiv f(t_1, \dots, t_n) \in T$, was zu zeigen war.

Wir zeigen jetzt durch Induktion über den Formelaufbau, das für jede Aussage $\alpha$ über $\tau$ gilt: $\alpha \in T \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha$. Daraus folgt sofort $\mathcal{A} \models T$.

Sei $\alpha$ von der Form $t \equiv s$ für variablenfreie Terme $t$ und $s$. Wähle eine Konstante $c$ mit $[c] = t^{\mathcal{A}}$. Wie wir bereits gezeigt haben, gilt $c \equiv t \in T$.

Angenommen, $s \equiv t \in T$. Wegen der maximalen Widerspruchsfreiheit gilt dann auch $c \equiv s \in T$. Es folgt $[c] = s^{\mathcal{A}}$ und damit $\mathcal{A} \models s \equiv t$.

Gelte nun $\mathcal{A} \models s \equiv t$. Dann ist $[c] = s^{\mathcal{A}}$ und damit $c \equiv s \in T$. Es folgt $t \equiv s \in T$.

Sei $\alpha$ von der Form $r(t_1, \dots, t_n)$ für ein $n$-stelliges Relationssymbol $r$ und variablenfreie Terme $t_i$. Wähle Konstanten $c_1, \dots, c_n$ mit $[c_i] = t_i^{\mathcal{A}}$ für alle $i$. Dann gilt $c_i \equiv t_i \in T$ für alle $i$.

Gelte $\mathcal{A} \models r(t_1, \dots, t_n)$. Dann gilt auch $\mathcal{A} \models r(c_1, \dots, c_n)$. Nach Definition von $r^{\mathcal{A}}$ ist $r(c_1, \dots, c_n) \in T$. Es folgt $r(t_1, \dots, t_n) \in T$.

Gelte $r(t_1, \dots, t_n) \in T$. Dann ist auch $r(c_1, \dots, c_n) \in T$. Es folgt $\mathcal{A} \models r(c_1, \dots, c_n)$ und damit $\mathcal{A} \models r(t_1 \dots, t_n)$.

Sei $\alpha = \neg\beta$. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \beta \Leftrightarrow \beta \notin T \Leftrightarrow \alpha \in T.$$

Sei $\alpha = \beta \vee \gamma$. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \alpha \Leftrightarrow (\mathcal{A} \models \beta \text{ oder } \mathcal{A} \models \gamma) \Leftrightarrow (\beta \in T \text{ oder } \gamma \in T) \Leftrightarrow \alpha \in T.$$

Sei schließlich $\alpha = \exists x\beta$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \exists x\beta$ genau dann, wenn es ein $c \in C$ gibt mit $\mathcal{A} \models \beta[[c]]$. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn es ein $c \in C$ gibt mit $\mathcal{A} \models \beta(x/c)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist Letzteres äquivalent dazu, dass es ein $c \in C$ gibt mit $\beta(x/c) \in T$. Da $T$ Henkin-Theorie ist, ist Letzteres äquivalent zu $\exists x\beta \in T$. □

7.3. **Eine Anwendung des Vollständigkeitssatzes.**

**Definition 7.20.** Sei $Z = \{z_0, z_1, \dots\}$ ein abzählbares Alphabet. Wir nennen $W \subseteq Z^*$ *entscheidbar*, wenn es einen Algorithmus gibt, der für gegebenes $w \in Z^*$ entscheidet, ob $w \in W$ gilt. $W \subseteq Z^*$ heißt *effektiv aufzählbar* (oder auch *berechenbar aufzählbar*), wenn $W = \emptyset$ ist oder es einen Algorithmus gibt, der für jedes $n \in \mathcal{N}$ ein $w_n \in Z^*$ berechnet, so dass $W = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt. ($W$ wird in Form einer *effektiven Liste* $w_0, w_1, \dots$ dargestellt.)

**Beispiel 7.21.** *a) $Z^*$ ist effektiv aufzählbar. Man kann nämlich $Z^*$ in folgender Weise effektiv aufzählen: Schreibe in eine Liste der Reihe nach das leere Wort, das Wort $z_0$, alle Wörter mit Länge $\leq 2$, die nur $z_0$ und $z_1$ benutzen, alle Wörter mit Länge $\leq 3$, die nur $z_0$, $z_1$ und $z_2$ benutzen usw.*

*b) Jede entscheidbare Menge $W \subseteq Z^*$ ist effektiv aufzählbar. Dazu schreibt man $Z^*$ in einer effektiven Liste $w_0, w_1, \dots$ auf. Dann entscheidet man der Reihe nach für jedes $n \in \mathbb{N}$, ob $w_n \in W$ gilt. Falls ja, so schreibt man $w_n$ in die Liste für $W$.*

*c) Jedes endliche $W \subseteq Z^*$ ist entscheidbar.*

Sei nun $\tau$ ein endliches Vokabular und

$$Z := \tau \cup \{(, ), \equiv, \exists, \neg, \vee\} \cup X,$$

wobei $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ eine abzählbare (genauer: effektiv aufzählbare) Menge von Variablen ist.

**Lemma 7.22.** *Über dem Alphabet $Z \cup \{\langle, \rangle, |\}$ sind folgende Mengen entscheidbar:*

*a) Die Menge $\mathrm{Tm}_\tau$ der Terme über $\tau$; die Menge $\mathrm{Fml}_\tau$ der Formeln über $\tau$; die Menge der Aussagen über $\tau$.*

*b) Die Mengen*

$$S_0 := \{\langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{Fml}_\tau\}$$

*und*

$$S_1 := \{\langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ und } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ ist ein Beweis}\}.$$

*c) Die Menge*

$$S_T := \{\langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N} \textit{ und } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \textit{ ist ein Beweis aus } T\}$$

*für jede entscheidbare Theorie $T$ über $\tau$.*

**Satz 7.23.** *Sei $T$ eine entscheidbare Theorie über $\tau$. Dann ist die Menge $\{\alpha \in \mathrm{Fml}_\tau : T \vdash \alpha\}$ effektiv aufzählbar.*

*Beweis.* Nach Lemma 7.22 c) ist die Menge der Beweise aus $T$ entscheidbar und damit auch effektiv aufzählbar. Sei

$$(\alpha_1^0, \dots, \alpha_{n_0}^0), (\alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1}^1), \dots$$

eine effektive Liste der Beweise aus $T$. Dann ist $\alpha_{n_0}^0, \alpha_{n_1}^1, \dots$ eine effektive Liste der aus $T$ ableitbaren Formeln. □

**Korollar 7.24.** *Sei $T$ eine entscheidbare Theorie über $\tau$. Dann ist die Menge $\{\alpha :\in \mathrm{Fml}_\tau : T \models \alpha\}$ effektiv aufzählbar.*

*Beweis.* Nach dem Vollständigkeitssatz ist $T \vdash \alpha$ äquivalent zu $T \models \alpha$. Die Behauptung des Korollars folgt nun sofort aus Satz 7.23. □

## 8. Etwas Modelltheorie

### 8.1. Der Kompaktheitssatz und seine Anwendungen.

**Satz 8.1** (Kompaktheitssatz). *Sei $T$ eine Theorie über einem Vokabular $\tau$. $T$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge $T_0$ von $T$ ein Modell hat.*

*Beweis.* Nach Korollar 7.18 hat $T$ genau dann ein Modell, wenn $T$ widerspruchsfrei ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn jede endliche Teilmenge von $T$ widerspruchsfrei ist, also ein Modell hat. □

**Satz 8.2** (Endlichkeitssatz). *Sei $T$ eine Menge von Aussagen und $\alpha$ eine Formel über einem Vokabular $\tau$. Dann gilt $T \models \alpha$ genau dann, wenn $T$ eine endliche Teilmenge $T_0$ hat, so dass $T_0 \models \alpha$ gilt.*

*Beweis.* Offenbar ist $\alpha$ genau dann aus $T$ ableitbar, wenn $\alpha$ aus einer endlichen Teilmenge von $T$ ableitbar ist. Mit dem Vollständigkeitssatz folgt die Behauptung des Endlichkeitssatzes. □

**Satz 8.3.** *Sei $T$ eine Theorie über einem Vokabular $\tau$, die ein unendliches Modell oder beliebig große endliche Modelle hat. Dann hat $T$ Modelle beliebig großer Mächtigkeit.*

*Beweis.* Sei $\kappa$ eine unendliche Kardinalzahl. Wir erweitern das Vokabular $\tau$ zu einem Vokabular $\tau'$, indem wir $\kappa$ neue Konstantensymbole einführen. Betrachte die Theorie

$$T' := T \cup \{\neg c \equiv d : c \text{ und } d \text{ sind verschiedene neue Konstantensymbole}\}.$$

Wir zeigen, dass $T'$ ein Modell hat. Nach Satz 8.1 genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von $T_0$ von $T'$ ein Modell hat.

Da $T_0$ endlich ist, kommen in $T_0$ auch nur endlich viele der neuen Konstantensymbole vor. Wähle ein Modell $\mathcal{A}$ von $T$, dass mindestens soviele Elemente hat, wie in $T_0$ neue Konstantensymbole vorkommen. Expandiere $\mathcal{A}$ zu einer $\tau'$-Struktur $\mathcal{A}_0$, in dem die in $T_0$ vorkommenden neuen Konstantensymbole paarweise verschieden interpretiert werden. Die Interpretation der anderen neuen Konstantensymbole in $\mathcal{A}_0$ sei beliebig gewählt. Es ist klar, dass $\mathcal{A}_0$ Modell von $T_0$ ist.

Damit existiert ein Modell $\mathcal{A}'$ von $T'$. Nach Wahl von $T'$ hat die Trägermenge von $\mathcal{A}'$ mindestens die Mächtigkeit $\kappa$. Außerdem ist $\mathcal{A}' \restriction \tau$ ein Modell von $T$. □

**Korollar 8.4.** *a) Eine erststufige Theorie, die beliebig große endliche Modelle hat, hat auch unendliche Modelle. Insbesondere lassen sich die Klassen der endlichen Mengen, der endlichen Halbordnungen, der endlichen Graphen, der endlichen Körper usw. nicht erststufig axiomatisieren.*

*b) Die Theorie von $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$ hat Modelle, die nicht zu $\mathbb{N}$ isomorph sind. Die entsprechenden Aussagen gelten auch für $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{C}$.*

Modelle der Theorie von wohlbekannten Strukturen wie $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{N}$, die nicht zu den typischen Modellen der Theorie isomorph sind, nennt man *Nichtstandard-Modelle.*

**Satz 8.5.** *Es gibt abzählbare Modelle von* $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$*, die nicht zu* $\mathbb{N}$ *isomorph sind.*

*Beweis.* Wir erweitern das Vokabular für $\mathbb{N}$ um ein neues Konstantensymbol $c$. Für jedes $n$ sei $\varphi_n$ die Aussage, die sagt, dass $c$ mindestens der $n$-te Nachfolger von 0 ist. Mit dem Kompaktheitssatz sieht man leicht, dass

$$T := \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ein Modell $\mathcal{A}$ hat. Nach Korollar 7.18 kann $\mathcal{A}$ abzählbar gewählt werden.

Wir haben zu zeigen, dass das Redukt von $\mathcal{A}$ auf das Vokabular von $\mathbb{N}$ nicht zu $\mathbb{N}$ isomorph ist. Nach Wahl von $T$ existiert in $\mathcal{A}$ ein Element (nämlich $c^{\mathcal{A}}$), welches für kein $n \in \mathbb{N}$ der $n$-te Nachfolger von $0^{\mathcal{A}}$ ist. Ein entsprechendes Element existiert in $\mathbb{N}$ nicht. $\square$