SKRIPTUM ZUR VORLESUNG ANALYSIS III IM SOMMERSEMESTER 2006

STEFAN GESCHKE

1. Grundlagen der Masstheorie

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Lebesguesche Maß auf den Räumen $\mathbb{R}^n$ zu definieren.

Betrachte zunächst nur $\mathbb{R}$. Wir wollen für möglichst viele Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein **Maß** definieren, das die Länge von Intervallen verallgemeinert. Genauer wollen wir möglichst vielen Teilmengen E von $\mathbb{R}$ eine Zahl $\lambda(E) \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ zuordnen, so dass gilt:

(1) für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist $\lambda([a,b]) = b - a$ und
(2) falls die Mengen E_i, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind, so gilt

$$\lambda\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(E_i).$$

1.1. σ-Algebren und Borelmengen.

Als Erstes machen wir uns Gedanken über den Definitionsbereich unseres Maßes λ. Dieser Definitionsbereich sollte unter den naheliegenden Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung und Mengendifferenz abgeschlossen sein. Wir werden noch etwas mehr fordern.

Definition 1.1. Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Algebra auf** X, falls gilt:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
(2) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{A}$
(3) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$
(4) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}$

Gilt zusätzlich

(5) $\forall i \in \mathbb{N}(A_i \in \mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$,

so heißt $\mathcal{A}$ **σ-Algebra**.

Anstelle von (3) genügt es in Definition 1.1 jeweils zu fordern, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ die Menge $X \setminus A$ Element von $\mathcal{A}$ ist. Auch (2) folgt mit dem folgendem Lemma jeweils aus den restlichen Bedingungen.

Lemma 1.2. *Sei X eine Menge und $B \subseteq X$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $A_i \subseteq X$. Dann gelten die* **de Morganschen Regeln**

(1) $X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus A_i)$
(2) $X \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus A_i)$

und die **Distributivgesetze**

(3) $B \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(B \cap A_i)$
(4) $B \cup \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(B \cup A_i)$

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X mit $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist auch $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Beweis. Leichtes Nachrechnen. □

Definition 1.3. Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von X. Die **von erzeugte σ-Algebra** $\sigma(\mathcal{F})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ umfaßt, d.h.,

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

$\mathcal{F}$ heißt **Erzeugendensystem** von $\sigma(\mathcal{F})$.

Die von den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ ist die **Borel-σ-Algebra** $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$. Die Elemente von $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ heißen **Borelmengen**.

Ohne mengentheoretische Hilfsmittel ist es schwierig, eine explizitere Beschreibung der Borelmengen anzugeben. Die meisten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die einem im Alltag begegnen, sind Borel. Diese These wird durch das folgende Lemma und den folgenden Satz gestützt.

Lemma 1.4. *Die folgenden Familien von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind alle Erzeugendensysteme von* $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$.

1. *abgeschlossene Mengen*
2. *kompakte Mengen*
3. *kartesische Produkte offener Intevalle (offene Quader)*
4. *kartesische Produkte abgeschlossener Intervalle (abgeschlossene Quader)*
5. *kartesische Produkte links offener, rechts abgeschlossener Intervalle*
6. *Mengen der Form $A_1 \times \cdots \times A_n$, wobei höchstens ein A_i von $\mathbb{R}$ verschieden ist und die Form $(-\infty, a)$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ hat.*
7. *Mengen der Form $A_1 \times \cdots \times A_n$, wobei höchstens ein A_i von $\mathbb{R}$ verschieden ist und die Form $(-\infty, a]$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ hat.*

Beweis. Beispielhaft zeigen wir, dass die Intervalle der Form $(-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{Q}$ die Borel-σ-Algebra auf den reellen Zahlen erzeugen.

Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann ist $(-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus (a, \infty)$. Nach Definition von σ-Algebren ist $\mathbb{R} \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Da (a, ∞) offen ist, ist $(a, \infty) \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Damit ist auch $(-\infty, a] \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Es folgt, dass $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ gilt.

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Dann ist $(a, b] = (\mathbb{R} \setminus (-\infty, a]) \cap (-\infty, b] \in \sigma(\mathcal{F})$. Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Für jedes $x \in U$ gibt es $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $x \in (a, b] \subseteq U$. Also ist

$$U = \bigcup\{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < b \wedge (a, b] \subseteq U\}.$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch die Familie, über die auf der rechten Seite der Gleichung vereinigt wird, abzählbar. Es folgt $U \in \sigma(\mathcal{F})$. Damit gilt $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Es folgt $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F})$. □

Lemma 1.5. *Sei $A_0 \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $x_0 + A_0 = \{x_0 + a : a \in A_0\}$ Borel.*

Beweis. Sei

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) : x_0 + A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Offenbar ist $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Wie man leicht nachrechnet, ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Für alle offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auch $x_0 + O$ offen. Damit enthält $\mathcal{A}$ alle offenen Mengen. Es folgt

$$\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n).$$

Damit ist $\mathcal{A} = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Mit anderen Worten, für jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auch $x_0 + A$ Borel. □

Es ist nicht einfach, eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zu finden, die nicht Borel ist. Man kann jedoch zeigen, dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ gibt. Das liegt letztlich daran, dass $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ ein abzählbares Erzeugendensystem hat (Lemma 1.4 (6)).

Es gibt also genauso viele Borelmengen wie reelle Zahlen. Es gibt aber mehr Teilmengen von $\mathbb{R}$ als reelle Zahlen. Damit muss es eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ geben, die nicht Borel ist. Später werden wir so eine Menge auch konstruieren.

1.2. **Maße.** Im folgenden werden wir in der Menge $[0,\infty] = [0,\infty) \cup \{\infty\}$ rechnen. Wie üblich setzen wir $a + \infty = \infty + a = \infty + \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Ist $(a_i)_{i\in\infty}$ eine Folge in $[0,\infty]$, so setzen wir $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \infty$, falls mindestens ein a_i unendlich ist oder alle a_i endlich sind, aber die Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ divergiert.

Definition 1.6. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt **Maß** auf $\mathcal{A}$, falls gilt:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$
(2) Sind ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$, so gilt $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$. (Maße sind **$\sigma$-additiv**.)

Ein auf $\mathcal{A}$ definiertes Maß μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(X) = 1$ gilt.

Lemma 1.7. *Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann gilt:*

(1) $A, B \in \mathcal{A} \wedge A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \mu(B)$ *(Maße sind* **monoton***.)*
(2) *Ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich $\subseteq$ wachsende Folge von Mengen in $\mathcal{A}$, so gilt*
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$
(3) *Ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich $\subseteq$ fallende Folge von Mengen in $\mathcal{A}$ und gibt es mindestens ein $i \in \mathbb{N}$, für das $\mu(A_i)$ endlich ist, so gilt*
$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Beweis. (1) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$. Dann gilt
$$\mu(A) \le \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(B).$$

(2) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{A}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$. Dann ist $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$. Es gilt
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right).$$

(3) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in $\mathcal{A}$, so dass es mindestens ein $i \in \mathbb{N}$ gibt, für das $\mu(A_i)$ endlich ist. O.B.d.A. können wir annehmen, dass bereits $\mu(A_1)$ endlich ist. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $B_i = A_1 \setminus A_i$. Dann ist $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in $\mathcal{A}$. Nach (2) gilt
$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \mu\left(A_1 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) \\ &= \lim_{i\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(B_i)) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_1 \setminus B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)\end{aligned}$$
□

Definition 1.8. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ heißt **äußeres Maß** auf X, falls gilt:

(1) $\alpha(\emptyset) = 0$
(2) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \alpha(A) \le \alpha(B)$

(3) Ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X, so ist
$$\alpha\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i).$$

Lemma 1.9. *Für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ sei*
$$\lambda^* = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) : \forall i \in \mathbb{N}(a_i, b_i \in \mathbb{R}) \wedge A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i)\right\}.$$
Dann ist λ^* äußeres Maß auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Offenbar ist λ^* eine Abbildung von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ nach $[0,\infty]$. Es ist auch klar, dass λ^* monoton ist, also Bedingung (2) in Definition 1.8 erfüllt.

Sei nun $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir müssen Bedingung (3) in Definition 1.8 für $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nachrechnen. Dazu können wir annehmen, dass $\lambda^*(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $((a_{ij}, b_{ij}))_{j\in\mathbb{N}}$ von offenen Intervallen mit $A_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_{ij}, b_{ij})$ und
$$\sum_{j\in\mathbb{N}}(b_{ij} - a_{ij}) \leq \lambda^*(A_i) + \varepsilon 2^{-i}.$$
Dann ist
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} (a_{ij}, b_{ij})$$
und
$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} (b_{ij} - a_{ij}) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_i) + \varepsilon \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_i) + \varepsilon.$$
Es folgt
$$\lambda^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_i).$$
Damit ist λ^* in der Tat ein äußeres Maß. □

Definition 1.10. Sei X eine Menge und $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **α-messbar**, falls für alle $B \subseteq X$ gilt:
$$\alpha(B) = \alpha(B \cap A) + \alpha(B \setminus A)$$
Mit $\mathcal{M}_\alpha$ wird die Menge aller α-messbaren Mengen bezeichnet.

Satz 1.11. *Ist α ein äußeres Maß auf einer Menge X, so ist $\mathcal{M}_\alpha$ eine σ-Algebra auf X. Die Abbildung $\alpha \restriction \mathcal{M}_\alpha$ ist ein Maß auf $\mathcal{M}_\alpha$.*

Beweis. Offenbar sind $\emptyset, X \in \mathcal{M}_\alpha$ und es gilt $(A \in \mathcal{M}_\alpha \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}_\alpha)$. Wegen der Bemerkung nach Definition 1.1 muss für den Nachweis, dass $\mathcal{M}_\alpha$ eine Algebra ist, nur noch gezeigt werden, dass $\mathcal{M}_\alpha$ unter Vereinigungen abgeschlossen ist.

Seien also $A_0, A_1 \mathcal{M}_\alpha$ und $B \subseteq X$. Wegen $A_1 \in \mathcal{M}_\alpha$ gilt
$$\alpha(B \setminus A_0) = \alpha((B \setminus A_0) \cap A_1) + \alpha((B \setminus A_0) \setminus A_1)).$$
Außerdem gilt
$$B \cap (A_0 \cup A_1) = (B \cap A_0) \cup ((B \setminus A_0) \cap A_1).$$
Da α äußeres Maß ist, folgt
$$\alpha(B \cap (A_0 \cup A_1)) \leq \alpha(B \cap A_0) + \alpha((B \setminus A_0) \cap A_1).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}\alpha(B \cap (A_0 \cup A_1)) + \alpha(B \setminus (A_0 \cup A_1)) \\ \leq \alpha(B \cap A_0) + \alpha((B \setminus A_0) \cap A_1) + \alpha((B \setminus A_0) \setminus A_1) \\ = \alpha(B \cap A_0) + \alpha(B \setminus A_0) = \alpha(B)\end{aligned}$$

Damit ist $A_0 \cup A_1 \in \mathcal{M}_\alpha$.

Nimmt man in dieser Rechnung A_0 und A_1 als disjunkt an und ersetzt B durch $B \cap (A_0 \cup A_1)$, so ergibt sich

$$\alpha(B \cap (A_0 \cup A_1)) = \alpha(B \cap A_0) + \alpha(B \cap A_1).$$

Mittels vollständiger Induktion erhält man sofort für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_\alpha$ und alle $B \subseteq X$ die Gleichung

$$\alpha\left(B \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha(B \cap A_i).$$

Sei nun $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{M}_\alpha$. Setze $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Wir zeigen $A \in \mathcal{M}_\alpha$ und $\alpha(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i)$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Da $\mathcal{M}_\alpha$ unter Vereinigungen abgeschlossen ist, sind alle B_n Elemente von $\mathcal{M}_\alpha$. Sei $C \subseteq X$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\alpha(C) = \alpha(C \cap B_n) + \alpha(C \setminus B_n) \\ = \sum_{i=1}^n \alpha(C \cap A_i) + \alpha(C \setminus B_n) \geq \sum_{i=1}^n \alpha(C \cap A_i) + \alpha(C \setminus A)\end{aligned}$$

Es folgt

$$\alpha(C) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(C \cap A_i) + \alpha(C \setminus A) \geq \alpha(C \cap A) + \alpha(C \setminus A)$$

Da α ein äußeres Maß ist, gilt

$$\alpha(C) \leq \alpha(C \cap A) + \alpha(C \setminus A)$$

und damit

$$\alpha(C) = \alpha(C \cap A) + \alpha(C \setminus A).$$

Es folgt $A \in \mathcal{M}_\alpha$ und

$$\alpha(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i).$$

Damit ist $\alpha \restriction \mathcal{M}_\alpha$ ein Maß, falls $\mathcal{M}_\alpha$ eine σ-Algebra ist. Letzteres folgt aber leicht aus dem bisher Bewiesenem. Sei $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}_\alpha$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $A_n = B_n \setminus \bigcup_{i<n} B_i$. Dann ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{M}_\alpha$. Es gilt

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}_\alpha.$$

Damit ist $\mathcal{M}_\alpha$ tatsächlich eine σ-Algebra. □

Definition 1.12. Sei α ein äußeres Maß auf einer Menge X. $A \subseteq X$ heißt **α-Nullmenge**, oder, wenn sich α aus dem Zusammenhang ergibt, einfach **Nullmenge**, falls $\alpha(A) = 0$ gilt.

Lemma 1.13. *Sei α ein äußeres Maß auf einer Menge X.*

a) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist ebenfalls Nullmenge.

b) Ist A α-messbar, $B \subseteq X$ und $N = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ eine Nullmenge, so ist auch B α-messbar.

Beweis. a) folgt sofort aus der Monotonie von äußeren Maßen.

b) Sei $C \subseteq X$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\alpha(C) &\leq \alpha(C \cap B) + \alpha(C \setminus B) \\ &\leq \alpha((C \cap B) \cup N) + \alpha((C \setminus B) \cup N) \\ &= \alpha((C \cap A) \cup N) + \alpha((C \setminus A) \cup N) \\ &\leq \alpha(C \cap A) + \alpha(N) + \alpha(C \setminus A) + \alpha(N) \\ &= \alpha(C \cap A) + \alpha(C \setminus A) = \alpha(C)\end{aligned}$$

Damit ist $B \in \mathcal{M}_\alpha$. □

1.3. **Das Lebesguesche Maß.** Wir sind nun soweit, dass wir das Lebesguesche Maß auf den reellen Zahlen definieren können.

Definition 1.14. Sei λ^* das äußere Maß aus Lemma 1.9. Wir setzen $\mathrm{Leb}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{\lambda^*}$ und nennen $\lambda = \lambda^* \restriction \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ das **Lebesguemaß** auf den reellen Zahlen. Die Mengen in $\mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ nennen wir **Lebesgue-messbar** oder einfach **messbar**.

Man beachte, dass nach Satz 1.11 $\mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und λ ein Maß auf $\mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ ist.

Lemma 1.15. *a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $\lambda^*([a, b]) = b - a$.*

b) Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Nullmenge.

c) Seien a und b wie in a). Dann sind (a, b) und $[a, b]$ messbar und es gilt $\lambda^*((a, b)) = b - a$.

Beweis. a) Für alle $\varepsilon > 0$ ist offenbar $[a, b] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Es folgt $\lambda^*([a, b]) \leq b-a$.

Wir müssen noch $\lambda^*([a, b]) \geq b-a$ zeigen. Sei $((a_i, b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen Intervallen mit $[a, b] \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i)$. Da $[a, b]$ kompakt ist, existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Offenbar gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) \geq \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq b - a.$$

Es folgt $\lambda^*([a, b]) \geq b - a$ und damit $\lambda^*([a, b]) = b - a$.

b) Sei $C = \{c_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei (a_i, b_i) ein offenes Intervall mit $c_i \in (a_i, b_i)$ und $b_i - a_i \leq \varepsilon 2^{-i}$. Dann ist $C \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i)$ und $\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) \leq \varepsilon$. Das zeigt $\lambda^*(C) = 0$.

c) Sei $B \subseteq \mathbb{R}$. Für die Messbarkeit von $[a, b]$ müssen wir

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap [a, b]) + \lambda^*(B \setminus [a, b])$$

zeigen. Dabei folgt

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap [a, b]) + \lambda^*(B \setminus [a, b])$$

bereits aus den Eigenschaften von äußeren Maßen.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $((a_i, b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Intervalle mit $B \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i)$ und $\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) \leq \lambda^*(B) + \varepsilon$. Dann gilt

$$B \cap [a, b] \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}((a - \varepsilon 2^{-i}, b + \varepsilon 2^{-i}) \cap (a_i, b_i))$$

und

$$B \setminus [a, b] \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(((-\infty, a) \cap (a_i, b_i)) \cup ((b, \infty) \cap (a_i, b_i))).$$

Dabei summieren sich die Längen der auf den rechten Seiten der beiden obigen Ungleichungen insgesamt auftretenden offenen Intervalle höchstens zu $\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) + \varepsilon$. Damit gilt

$$\lambda^*(B \cap [a,b]) + \lambda^*(B \setminus [a,b]) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) + \varepsilon \leq \lambda^*(B) + 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ergibt sich

$$\lambda^*(B \cap [a,b]) + \lambda^*(B \setminus [a,b]) = \lambda^*(B).$$

Also ist $[a,b]$ messbar.

Da $\{a,b\}$ eine Nullmenge ist, ist auch (a,b) messbar. Es gilt

$$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*((a,b)) + \lambda^*(\{a,b\}) = b - a.$$

Daraus folgt $\lambda^*((a,b)) = b - a$. □

Korollar 1.16. *Alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar.*

Beweis. Da die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ von den offenen Intervallen erzeugt wird, alle offenen Intervalle messbar sind und die messbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, gilt $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$. □

Satz 1.17. *Das Lebesguemaß ist* **translationsinvariant**. *D.h., für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $A \in \mathrm{Leb}(\mathbb{R})$ ist $t + A = \{t + a : a \in A\}$ messbar und es gilt $\lambda(A) = \lambda(t + A)$.*

Beweis. Offenbar ist für alle $t \in \mathbb{R}$ und für jedes offene Intervall (a,b) die Translation $t + (a,b)$ einfach das Intervall $(t + a, t + b)$. Diese hat die Länge $b - a$. Daraus folgt, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $\lambda^*(A) = \lambda^*(t + A)$. Mittels einer leichten Rechnung folgt, dass für messbare A auch $t + A$ messbar ist. □

Definition 1.18. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt F_σ-Menge, wenn sie Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ist. A heißt G_δ-Menge, falls A Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist.

Man beachte, dass G_δ- und F_σ-Mengen Borel sind. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann G_δ, wenn das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ eine F_σ-Menge ist.

Lemma 1.19. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ messbar. Dann existieren eine F_σ-Menge $B \subseteq A$ und eine G_δ-Menge $C \supseteq A$, so dass $C \setminus B$ eine Nullmenge ist. Insbesondere ist eine Menge genau dann messbar, wenn sie bis auf eine Nullmenge mit einer F_σ- oder G_δ-Menge übereinstimmt. D.h., eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann messbar, wenn es eine F_σ- oder G_δ-Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ gibt, so dass $A \triangle B$ eine Nullmenge ist.*

Beweis. Zunächst nehmen wir an, dass $\lambda(A)$ endlich ist. Wir konstruieren eine G_δ-Menge $C \supseteq A$ mit $\lambda(C) = \lambda(A)$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $((a_{n,i}, b_{n,i}))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Intervalle mit

$$A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_{n,i}, b_{n,i})$$

und

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_{n,i} - a_{n,i}) \leq \lambda(A) + 2^{-n}.$$

Setze $O_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_{n,i}, b_{n,i})$. Die Menge O_n ist offen.

Setze $C = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_n$. Dann ist C eine G_δ-Menge mit $A \subseteq C$ und es für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lambda(A) \leq \lambda(C) \leq \lambda(A) + 2^{-n}.$$

Es folgt $\lambda(A) = \lambda(C)$, und damit ist $C \setminus A$ eine Nullmenge.

Ist nun $\lambda(A)$ unendlich, so müssen wir etwas subtiler vorgehen. Wähle eine Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, messbarer Mengen von endlichem Maß mit $A =$

$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ sei $((a_{n,m,i}, b_{n,m,i}))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Intervalle mit

$$A_m \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (a_{n,m,i}, b_{n,m,i})$$

und

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (b_{n,i} - a_{n,i}) \leq \lambda(A_m) + 2^{-n-m}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ Setze $O_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (a_{n,m,i}, b_{n,m,i})$. Wieder ist jedes O_n offen.

Setze $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Dann ist C eine G_δ-Menge und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda(C \setminus A) \leq 2^{-n}$. Damit ist $C \setminus A$ eine Nullmenge.

Die Konstruktion der gesuchten F_σ-Menge B kann auf das bisher Bewiesene zurückgeführt werden. Sei D eine G_δ-Menge mit $\mathbb{R} \setminus A \subseteq D$, so dass $D \setminus (\mathbb{R} \setminus A)$ eine Nullmenge ist. Dann ist $B = \mathbb{R} \setminus D$ eine F_σ-Menge, und $A \setminus B = D \setminus (\mathbb{R} \setminus A)$ ist eine Nullmenge. Da Vereinigungen von abzählbar vielen Nullmengen wieder Nullmengen sind, ist $C \setminus B$ eine Nullmenge. $\square$

1.4. **Das n-dimensionale Lebesguemaß.**

Lemma 1.20. *Sei α ein äußeres Maß auf einer Menge X und β ein äußeres Maß auf einer Menge Y. Für jede Menge $S \subseteq X \times Y$ sei*

$$(\alpha\otimes\beta)(S) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i)\cdot\beta(B_i) : \forall i \in \mathbb{N}(A_i \subseteq X \wedge B_i \subseteq Y) \wedge S \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \times B_i\right\}.$$

Dann ist $(\alpha\otimes\beta)$ ein äußeres Maß auf $X \times Y$.

Ist $A \subseteq X$ α-messbar und $B \subseteq Y$ β-messbar, so ist $A \times B$ $(\alpha\otimes\beta)$-messbar.

Beweis. Es ist klar, dass $\alpha\otimes\beta$ monoton ist und dass $(\alpha\otimes\beta)(\emptyset) = 0$ gilt. Sei nun $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von $X \times Y$ und $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $(A_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X und $(B_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von Y mit

$$S_n \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{n,i} \times B_{n,i}$$

und

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_{n,i})\cdot\beta(B_{n,i}) \leq (\alpha\otimes\beta)(S_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Dann gilt

$$S \subseteq \bigcup_{i,n\in\mathbb{N}} A_{n,i} \times B_{n,i}$$

und

$$(\alpha\otimes\beta)(S) \leq \sum_{i,n\in\mathbb{N}} \alpha(A_{n,i})\cdot\beta(B_{n,i}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha\otimes\beta)(S_n) + \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt

$$(\alpha\otimes\beta)(S) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha\otimes\beta)(S_n).$$

Damit ist $\alpha\otimes\beta$ ein äußeres Maß auf $X \times Y$.

Als nächstes zeigen wir, dass für α-messbare Mengen $A \subseteq X$ die Menge $A \times Y$ $(\alpha\otimes\beta)$-messbar ist. Dazu sei $C \subseteq X \times Y$ und $\varepsilon > 0$. Weiter sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X und $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von Y mit

$$C \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \times B_i$$

und

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i)\cdot\beta(B_i) \leq (\alpha\otimes\beta)(C) + \varepsilon.$$

Es gilt

$$C \cap (A \times Y) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} ((A_i \cap A) \times B_i)$$

sowie

$$C \setminus (A \times Y) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} ((A_i \setminus A) \times B_i)$$

Da A messbar ist, gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\alpha(A_i) = \alpha(A_i \cap A) + \alpha(A_i \setminus A).$$

Es ergibt sich

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i)\cdot\beta(B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i \cap A)\cdot\beta(B_i) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha(A_i \setminus A)\cdot\beta(B_i).$$

Daraus folgt

$$(\alpha \otimes \beta)(C \cap (A \times Y)) + (\alpha \otimes \beta)(C \setminus (A \times Y)) \\ \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(A_i \cap A) \cdot \beta(B_i) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(A_i \setminus A) \cdot \beta(B_i) \leq (\alpha \otimes \beta)(C) + \varepsilon.$$

Da ε beliebig war und da

$$(\alpha \otimes \beta)(C) \leq (\alpha \otimes \beta)(C \cap (A \times Y)) + (\alpha \otimes \beta)(C \setminus (A \times Y))$$

daraus folgt, dass $(\alpha \otimes \beta)$ ein äußeres Maß ist, erhalten wir

$$(\alpha \otimes \beta)(C) = (\alpha \otimes \beta)(C \cap (A \times Y)) + (\alpha \otimes \beta)(C \setminus (A \times Y)).$$

Damit ist $A \times Y$ $(\alpha \otimes \beta)$-messbar. Analog sieht man, dass für β-messbares $B \subseteq Y$ die Menge $X \times B$ $(\alpha \otimes \beta)$-messbar ist. Damit ist auch $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ $(\alpha \otimes \beta)$-messbar. □

Mit Lemma 1.20 können wir nun rekursiv für alle n ein äußeres Maß $(\lambda^*)^n$ auf $\mathbb{R}^n$ definieren.

Definition 1.21. Sei λ^* das in Lemma 1.9 definierte äußere Maß auf $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Setze $(\lambda^*)^1 = \lambda^*$. Für $n > 1$ sei $(\lambda^*)^n = (\lambda^*)^{n-1} \otimes \lambda^*$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{(\lambda^*)^n}$ und $\lambda^n = (\lambda^*)^n \restriction \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n)$. λ^n ist das **n-dimensionale Lebesguemaß**.

Man beachte, dass aus Lemma 1.20 sofort $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Im folgenden werden wir anstelle von λ^n einfach λ schreiben.

Lemma 1.22. *Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine offene Menge O mit $C \subseteq O$ und $\lambda(O) \leq (\lambda^*)^n(C) + \varepsilon$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n. Für $n = 1$ haben wir die Behauptung schonmal implizit im Beweis von Lemma 1.19 benutzt.

Sei nun $n > 1$. Dann existieren Folgen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}^{n-1}$ beziehungsweise $\mathbb{R}$ mit

$$C \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \times B_i)$$

und

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\lambda^*)^{-1}(A_i) \cdot \lambda^*(B_i) \leq (\lambda^*)^n(C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung existieren für alle $i \in \mathbb{N}$ offene Mengen U_i und V_i mit $A_i \subseteq U_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, $B_i \subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}$ und

$$\lambda(U_i) \cdot \lambda(V_i) \leq (\lambda^*)^{n-1}(A_i) \cdot \lambda^*(B_i) + \varepsilon \cdot 2^{-i-1}.$$

Die Menge $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (U_i \times V_i)$ ist eine offene Obermenge von C.

Es gilt

$$(\lambda^*)^n(C) \leq (\lambda^*)^n(O) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(U_i) \cdot \lambda(V_i) \\ \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left((\lambda^*)^{n-1}(A_i) \cdot \lambda^*(B_i) + \varepsilon \cdot 2^{-i-1}\right) \leq (\lambda^*)^n(C) + \varepsilon.$$

□

Lemma 1.23. *a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine kompakte Menge $C \subseteq A$ mit $\lambda(A) \leq \lambda(C) + \varepsilon$.*

b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar mit $\lambda(A) = \infty$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine kompakte Menge $C \subseteq A$ mit $\lambda(C) \geq n$.

Beweis. a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei U_n die abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^n$ um den Nullpunkt mit Radius n. Wegen der σ-Additivität von λ gilt

$$\lambda(A) = \lim_{n \to \infty} \lambda(A \cap U_n).$$

Insbesondere existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda(A) \leq \lambda(A \cap U_n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Betrachte nun die Menge $U_n \setminus A$. Nach Lemma 1.22 existiert eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $U_n \setminus A \subseteq O$ und

$$\lambda(O) \leq \lambda(U_n \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze $C = U_n \setminus O$. Dann ist C kompakt und es gilt $C \subseteq A$. Weiter ist

$$\lambda(A \cap U_n) \leq \lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$\lambda(A) \leq \lambda(C) + \varepsilon.$$

b) Wegen

$$\lambda(A) = \lim_{m \to \infty} \lambda(A \cap U_m)$$

gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\lambda(A \cap U_m) \geq n + 1$. Nach a) existiert eine kompakte Menge $C \subseteq A \cap U_m$ mit $\lambda(C) \geq n$. □

Lemma 1.24. *Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $\lambda(A \times B) = \lambda(A) \times \lambda(B)$.*

Beweis. Auf Grund der induktiven Definition des Lebesguemaßes gilt

$$\lambda(A \times B) \leq \lambda(A) \times \lambda(B).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und eine Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{B}}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit

$$A \times B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \times B_i)$$

und

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\lambda^*)^n(A_i) \cdot \lambda^*(B_i) \leq \lambda(A \times B) + \varepsilon.$$

Nach Lemma 1.22 können wir annehmen, dass die A_i und B_i alle offen sind.

Da mit A und B auch $A \times B$ kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass bereits

$$A \times B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$$

gilt. Wir können nun Familien $(C_1, \dots, C_m)$ und $(D_1, \dots, D_m)$ messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften wählen:

(1) Die C_j und die D_j sind jeweils paarweise disjunkt.
(2) $C_1 \cup \dots \cup C_m = A$ und $D_1 \cup \dots \cup D_m = B$.
(3) Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$A_i \times B_i = \bigcup \left\{ C_j \times D_k : j,k \in \{1, \dots, m\} \wedge C_j \times D_k \subseteq A_i \times B_i \right\}.$$

Es gilt

$$\lambda(A \times B) \le \lambda(A) \times \lambda(B) = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda(C_j)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda(D_k)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} (\lambda(C_j) \cdot \lambda(D_k)) \le \sum_{i=1}^{n} (\lambda(A_i) \times \lambda(B_i)) \le \lambda(A \times B) + \varepsilon$$

Da das für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ergibt sich

$$\lambda(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B).$$

□

Lemma 1.25. *Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ messbar. Dann ist $\lambda(A \times B) = \lambda(A) \times \lambda(B)$.*

Beweis. Ist A oder B eine Nullmenge, so ist auch $A \times B$ eine Nullmenge, wie man leicht nachrechnet. In der Maßtheorie gilt also $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Wir können also annehmen, dass weder A noch B das Maß 0 haben. Angenommen, es gilt $\lambda(A) = \infty$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 1.23 existieren kompakte Mengen $C \subseteq A$ und $D \subseteq B$ mit $\lambda(C) \cdot \lambda(D) \ge n$. Es gilt $C \times D \subseteq A \times B$ und nach Lemma 1.24 gilt

$$\lambda(A \times B) \ge \lambda(C \times D) = \lambda(C) \cdot \lambda(D) \ge n.$$

Es folgt $\lambda(A \times B) = \infty = \lambda(A) \cdot \lambda(B)$. Analog behandelt man den Fall $\lambda(B) = \infty$.

Seien nun A und B von endlichem Maß. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 1.23 existieren kompakte Mengen $C \subseteq A$ und $D \subseteq B$ mit

$$\lambda(A) \cdot \lambda(B) \le \lambda(C) \cdot \lambda(D) + \varepsilon.$$

Nach Lemma 1.24 gilt

$$\lambda(A \times B) \le \lambda(A) \cdot \lambda(B) \le \lambda(C) \cdot \lambda(D) + \varepsilon = \lambda(C \times D) + \varepsilon \le \lambda(A \times B) + \varepsilon.$$

Wieder ergibt sich $\lambda(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B)$. □

Satz 1.26. *Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ messbar. Dann ist*

$$\lambda(A_1 \times \cdots \times A_n) = \lambda(A_1) \cdot \cdots \cdot \lambda(A_n).$$

Beweis. Die Behauptung folgt leicht mittels vollständiger Induktion aus Lemma 1.25. □

Wir haben das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ durch Rekursion über die Dimension definiert, wobei wir die Darstellung $\mathbb{R}^n = (\dots(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \cdots \times \mathbb{R}$ zu Grunde gelegt haben. Man kann nachrechnen, dass jede Klammerung von $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ zu demselben Maß geführt hätte. Wesentliches Hilfsmittel ist hierbei Satz 1.26.

2. Integration

2.1. Messbare Funktionen.

Definition 2.1. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ heißt **Borel-messbar** oder einfach **messbar**, falls für jede Borelmenge $B \subseteq \mathbb{R}^m$ auch $f^{-1}[B] \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel ist.

Im folgenden formulieren wir einige Resultate für messbare Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die jeweils sinngemäß auch für messbare Funktionen gelten, die nur auf einer Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

Lemma 2.2. *Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ messbar, so ist auch $g \circ f$ messbar.*

Lemma 2.3. *Sei $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^m$. Dann ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau dann messbar, wenn für alle $A \in \mathcal{E}$ die Menge $f^{-1}[A]$ Borel ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^m)$. Dann ist $\mathcal{E}$ insbesondere eine Teilmenge von $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^m)$. Ist f messbar, so gilt also $f^{-1}[A] \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ für alle $A \in \mathcal{E}$.

Sei andererseits jede Menge der Form $f^{-1}[A]$, $A \in \mathcal{E}$, Borel. Wir zeigen, dass f messbar ist. Dazu genügt es, nachzuweisen, dass die Familie

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R}^m : f^{-1}[A] \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)\}$$

eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}$ umfasst. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ haben wir aber genau vorausgesetzt.

Offenbar sind $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ und $f^{-1}[\mathbb{R}^m] = \mathbb{R}^n$ Borel. Damit liegen $\emptyset$ und $\mathbb{R}^m$ in $\mathcal{T}$. Seien nun $A, B \in \mathcal{T}$. Dann gilt

$$f^{-1}[B \setminus A] = f^{-1}[B] \setminus f^{-1}[A] \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^m)$$

und

$$f^{-1}[B \cap A] = f^{-1}[B] \cap f^{-1}[A] \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^m).$$

Also liegen auch $A \setminus B$ und $A \cap B$ in $\mathcal{T}$.

Sei schließlich $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Menge in $\mathbb{T}$. Dann ist

$$f^{-1}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[A_n] \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$$

und damit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. Damit ist $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra. Es folgt $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{T}$. Damit ist f messbar. □

Korollar 2.4. *Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist messbar.*

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 2.3, da Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen wieder offen sind und die offenen Mengen die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^m$ erzeugen. □

Wie man leicht sieht, bilden die messbaren Funktionen auf einer Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ einen reellen Vektorraum.

Lemma 2.5. *Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar, so sind die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < f(x)\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = f(x)\}$ Borel.*

Beweis. Mit f und g ist auch $f - g$ messbar. Also sind

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < f(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (f - g)(x) > 0\}$$

und

$$\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = f(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (f - g)(x) = 0\}$$

Borel. □

Es ist für einige Betrachtungen nützlich, nicht in $\mathbb{R}$, sondern in dem Raum $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zu rechnen. Das hat den Vorteil, dass Suprema und Infima auch dann definiert sind, wenn sie ∞ bzw. $-\infty$ sind. Die Borel-Teilmengen des Raumes $\overline{\mathbb{R}}$ seien genau die Mengen der Form $B \cup C$ mit $B \subseteq \mathbb{R}$ und $C \subseteq \{-\infty, \infty\}$. Wie man leicht sieht, bilden diese Mengen eine σ-Algebra. Messbarkeit von Funktionen nach $\overline{\mathbb{R}}$ ist auf die naheliegende Weise definiert.

Lemma 2.6. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\overline{\mathbb{R}}$. Dann sind die punktweise definierten Funktionen $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ messbar. Außerdem ist die Menge*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \textit{ existiert}\}$$

Borel. Falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, so ist die punktweise definierte Funktion $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Die Mengen der Form $[-\infty, a]$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, erzeugen die Borel-$\sigma$-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$. Es genügt daher zu zeigen, dass die g-Urbilder solcher Mengen Borel sind.

Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist

$$g^{-1}[[-\infty, a]] = \{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n : f_n(x) \leq a\}.$$

Diese Menge ist Borel, da alle f_n messbar sind.

Die Funktion $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ behandelt man analog. Wegen

$$\limsup\nolimits_{n\to\infty} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} f_n$$

und

$$\liminf\nolimits_{n\to\infty} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} f_n$$

folgen sofort die entsprechenden Behauptungen für $\liminf$ und $\limsup$.

Damit ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert}\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \liminf\nolimits_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup\nolimits_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

Borel. Falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, so ist $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$ messbar. □

Wichtige Beispiele messbarer Funktionen sind die charakteristischen Funktionen von Borelmengen.

Lemma 2.7. *Für jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die* **charakteristische Funktion** *$\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Dabei ist χ_A definiert durch*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Definition 2.8. Eine **Treppenfunktion** auf $\mathbb{R}^n$ ist eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt. Entsprechend sind Treppenfunktionen auf Borel-Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ definiert.

Wie man leicht sieht, bilden die Treppenfunktionen auf einer Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine reellen Vektorraum.

Satz 2.9. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel.*

a) Sei $f : A \to [0, \infty)$ messbar. Dann existieren Treppenfunktionen

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$$

auf A mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

für alle $x \in A$.

b) Jede messbare Funktion auf A ist punktweiser Limes einer Folge von Treppenfunktionen.

c) Für beschränkte Funktionen kann in a) und b) gleichmäßige Konvergenz erzielt werden.

Beweis. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n = \left(\sum_{i=0}^{4^n-1} i \cdot 2^{-n} \cdot \chi_{A_{n,i}} \right) + 2^n \cdot \chi_{B_n}$$

mit $A_{n,i} = \{x \in A : i \cdot 2^{-n} \le f(x) < (i+1) \cdot 2^{-n}\}$ und $B_n = \{x \in A : f(x) \ge 2^n\}$. Nach Konstruktion ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und man sieht leicht, dass die Folge punktweise gegen f konvergiert. Aus der Messbarkeit von f folgt sofort, dass auch alle f_n messbar sind.

b) kann wegen $f = \max(f, 0) - \max(-f, 0)$ auf a) zurückgeführt werden.

c) folgt unmittelbar aus der Konstruktion. □

2.2. **Integrierbare Funktionen.** Die integrierbaren Funktionen werden die messbaren Funktionen sein, denen sich auf sinnvolle Weise ein Integral zuordnen lässt. Wir werden zunächst Integrale positiver Treppenfunktionen, dann Integrale positiver messbarer Funktionen und schließlich Integrale integrierbarer Funktionen definieren.

Wir werden uns in den Definitionen und Sätzen auf das Lebesguemaß beschränken. Es ist aber wichtig, festzustellen, dass unsere Definitionen und Sätze im wesentlichen für beliebige Maße auf beliebigen Mengen durchgehen, wobei man Messbarkeit von Funktionen dann natürlich entsprechend (auf die naheliegende Weise) definieren muss.

Definition 2.10. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Sei f eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$ und $\{a_1, \dots, a_m\}$ die Menge ihrer Funktionswerte. Alle a_i seien ≥ 0. Wir setzen

$$\int_E f d\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(f^{-1}(a_i) \cap E).$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar. Dann sei

$$\int_E f d\lambda = \sup \left\{ \int_E g d\lambda : 0 \le g \le f,\ g \text{ Treppenfunktion} \right\}.$$

Lemma 2.11. *Seien g und h Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit Werten ≥ 0.*

a) Die Abbildung

$$\mu : E \mapsto \int_E g d\lambda$$

definiert ein Maß auf $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$.

b) Für alle $E \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_E g d\lambda + \int_E h d\lambda = \int_E (g + h) d\lambda.$$

c) Sei $E \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$. Falls $g \le h$ ist, so gilt

$$\int_E g d\lambda \le \int_E h d\lambda.$$

d) Ist c eine reelle Zahl ≥ 0, so gilt

$$\int_E c \cdot g d\lambda = c \cdot \int_E g d\lambda.$$

Beweis. a) Sei $g = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{g^{-1}(a_i)}$, wobei die a_i die paarweise verschiedenen Funktionswerte von g sind. Offenbar gilt $\mu(\emptyset) = 0$. Seien nun E_i, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte Borelmengen und $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mu(E) = \sum_{i=1}^m a_i \lambda(E \cap g^{-1}(a_i)) &= \sum_{i=1}^m a_i \cdot \sum_{j=1}^\infty \lambda(E_j \cap g^{-1}(a_i)) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^m a_i \cdot \lambda(E_j \cap g^{-1}(a_i)) = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)\end{aligned}$$

b) Seien g und a_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ wie im Beweis von a). Weiter sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel und $h = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{h^{-1}(b_i)}$, wobei die b_i die paarweise verschiedenen Funktionswerte von h sind.

Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, k\}$ sei $E_{ij} = E \cap g^{-1}(a_i) \cap h^{-1}(b_j)$. Dann gilt

$$\int_{E_{ij}} g d\lambda = a_i \lambda(E_{ij}), \qquad \int_{E_{ij}} h d\lambda = b_j \lambda(E_{ij})$$

und

$$\int_{E_{ij}} (g + h) d\lambda = (a_i + b_j)\lambda(E_{ij}).$$

Nach a) und wegen $E = \bigcup_{i,j} E_{ij}$ gilt

$$\int_E (g+h) d\lambda = \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} (g+h) d\lambda = \sum_{i,j} \left(\int_{E_{ij}} g d\lambda + \int_{E_{ij}} h d\lambda \right) = \int_E g d\lambda + \int_E h d\lambda$$

c) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ wieder eine Borelmenge. Wegen $g \leq h$ ist $f = h - g$ eine Treppenfunktion mit Funktionswerten ≥ 0. Also ist $\int_E f d\lambda \geq 0$. Damit ist nach b)

$$\int_E g d\lambda \leq \int_E g d\lambda + \int_E f d\lambda = \int_E h d\lambda.$$

d) ist klar. □

Sei $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ eine Familie von paarweise disjunkten Borel-Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ eine Folge reeller Zahlen ≥ 0. Sei $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$ und $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Aus Lemma 2.11 b) folgt

$$\int_E f d\lambda = \sum_{i=1}^m a_i \lambda(E \cap A_i),$$

unabhängig davon, ob die a_i paarweise verschieden sind oder nicht.

Lemma 2.12. *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar und $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $0 \leq f \restriction E \leq g \restriction E \quad \Rightarrow \quad \int_E f d\lambda \leq \int_E g d\lambda$

(2) $E \subseteq F \quad \Rightarrow \quad \int_E f d\lambda \leq \int_F f d\lambda$

(3) $f \restriction E = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_E f d\lambda = 0$

(4) $\lambda(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_E f d\lambda = 0$

Der folgende **Satz von der monotonen Kovergenz** (oder auch **Satz von Beppo Levi**) ist die Basis aller Konvergenzsätze für das Lebesgueintegral.

Satz 2.13. *Seien f und $f_1, f_2, \dots$ messbare Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $[0,\infty]$. Es gelte $f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Die Funktion f sei der punktweise Limes der f_i. Für alle Borelmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt dann*

$$\lim_{i\to\infty} \int_E f_i d\lambda = \int_E f d\lambda.$$

Beweis. Die Messbarkeit von f folgt aus Lemma 2.6. Da mit der Folge der f_i auch die Folge der Integrale der f_i monoton wächst, existiert

$$c = \lim_{n\to\infty} \int_E f_i d\lambda$$

in $[0,\infty]$. Wegen $f_i \leq f$ ist $\int_E f_i d\lambda \leq \int_E f d\lambda$. Es folgt $c \leq \int_E f d\lambda$.

Andererseits gilt $c = \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_E f_i d\lambda$. Um nun $\int_E f d\lambda \leq c$ nachzuweisen, genügt es daher die Ungleichung

$$\int_E g d\lambda \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_E f_i d\lambda$$

für alle Treppenfunktionen g mit $0 \leq g \leq f$ zu zeigen.

Wir beweisen nun diese Ungleichung. Sei $0 \leq a < 1$. Für all $i \in \mathbb{N}$ sei

$$E_i = \{x \in E : a \cdot g(x) \leq f_i(x)\}.$$

Offenbar gilt $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$. Da $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ für alle x in E gegen $f(x)$ konvergiert, gilt $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$. Folglich gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$c \geq \int_E f_i d\lambda \geq \int_{E_i} f_i d\lambda \geq \int_{E_i} a \cdot g d\lambda = a \cdot \int_{E_i} g d\lambda.$$

Aus der σ-Additivität der Abbildung $F \mapsto \int_F g d\lambda$ folgt

$$c \geq a \cdot \lim_{i\to\infty} \int_{E_i} g d\lambda = a \cdot \int_E g d\lambda.$$

Da $a < 1$ beliebig war, folgt

$$c \geq \int_E g d\lambda.$$

□

Wir wollen noch eine Formulierung dieses Satzes für Summen unendlich vieler Funktionen beweisen. Dazu benötigen wir

Lemma 2.14. *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ messbar und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel. Dann gilt*

$$\int_E (f+g) d\lambda = \int_E f d\lambda + \int_E g d\lambda.$$

Beweis. Wähle monoton wachsende Folgen $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die punktweise gegen f beziehungsweise g konvergieren. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_E (f+g) d\lambda &= \lim_{i\to\infty} \int_E (f_i + g_i) d\lambda = \lim_{i\to\infty} \left(\int_E f_i d\lambda + \int_E g_i d\lambda \right) \\ &= \lim_{i\to\infty} \int_E f_i d\lambda + \lim_{i\to\infty} \int_E g_i d\lambda = \int_E f d\lambda + \int_E g d\lambda\end{aligned}$$

□

Korollar 2.15. *Seien $g_1, g_2, \dots : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ messbar und $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$. Dann ist g messbar und für jede Borelmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\int_E g d\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E g_i d\lambda.$$

Beweis. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $f_i = g_1 + \dots + g_i$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Lemma 2.14 und Satz 2.13. □

Definition 2.16. Für eine Funktion $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ seien $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$. Es gilt $f = f^+ - f^-$. Mit f sind auch f^+ und f^- messbar.

Sei nun $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **integrierbar** auf E, falls die Integrale $\int_E f^+ d\lambda$ und $\int_E f^- d\lambda$ endlich sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_E f d\lambda = \int_E f^+ d\lambda - \int_E f^- d\lambda.$$

Eine messbare Funktion $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt schlicht **integrierbar**, falls irgendeine, und damit jede, messbare Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^n$ auf E integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_E f d\lambda = \int_E g d\lambda,$$

wobei g eine messbare Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^n$ ist. Es sollte klar sein, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von g ist.

Man beachte, dass wegen

$$0 \le f^-, f^+ \le |f| \le f^- + f^+$$

eine Funktion $f : E \to [-\infty, \infty]$ genau dann integrierbar ist, wenn f messbar ist und $\int_E |f| \, d\lambda < \infty$ gilt.

Satz 2.17. *Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel, $f, g : E \to \mathbb{R}$ integrierbar und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $af + bg$ integrierbar mit*

$$\int_E (af + bg) d\lambda = a \int_E f d\lambda + b \int_E g d\lambda.$$

Ist $f \ge 0$, so gilt $\int_E f d\lambda \ge 0$. Schließlich ist

$$\left| \int_E f d\lambda \right| \le \int_E |f| \, d\lambda.$$

Insbesondere bilden den integrierbare Funktionen einen Vektorraum, und die Abbildung $f \mapsto \int_E f d\lambda$ ist ein positives lineares Funktional auf diesem Vektorraum.

Beweis. Im wesentlichen einfaches Nachrechnen. □

2.3. Konvergenzsätze.

Lemma 2.18 (Lemma von Fatou)**.** *Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel und $f_i : E \to [0,\infty]$ messbar für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\int_E \liminf_{i\to\infty} f_i d\lambda \le \liminf_{i\to\infty} \int_E f_i d\lambda.$$

Beweis. Nach Lemma 2.6 ist $\liminf_{i\to\infty} f_i$ messbar. Satz 2.13 impliziert nun

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{i\to\infty} f_i d\lambda = \int_E \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{i\ge k} f_i d\lambda = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_E \inf_{i\ge k} f_i d\lambda \\ \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\ge k} \int_E f_i d\lambda = \liminf_{i\to\infty} \int_E f_i d\lambda\end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt dabei aus

$$\forall j \ge k \left(\inf_{i\ge k} f_i \le f_j\right) \quad \Rightarrow \quad \forall j \ge k \left(\int_E \inf_{i\ge k} f_i d\lambda \le \int_E f_j d\lambda\right).$$

□

Mit dem Lemma von Fatou erhalten wir leicht den **Konvergenzsatz von Lebesgue** (auch **Satz von der majorisierten** (oder **dominierten**) **Konvergenz** genannt).

Satz 2.19. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel und $f_i : E \to \mathbb{R}$ messbar für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise gegen die Funktion f. Angenommen, es gibt eine integrierbare Funktion $g : E \to [0,\infty]$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_i| \le g$.*

Dann sind f und alle f_i integrierbar mit

$$\lim_{i\to\infty} \int_E |f_i - f| \, d\lambda = 0$$

und

$$\int_E f d\lambda = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i d\lambda.$$

Beweis. Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $|f_i| \le g$ und damit

$$\int_E |f_i| \, d\lambda \le \int_E g d\lambda.$$

Also ist f_i integrierbar. Die Messbarkeit von f folgt aus Lemma 2.6. Wegen $|f| \le g$ ist f ebenfalls integrierbar.

Sei nun $h = g + |f|$. Dann ist h integrierbar. Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $0 \le |f_i - f| \le h$. Nach dem Lemma von Fatou gilt

$$\begin{aligned}\int_E h d\lambda = \int_E \lim_{i\to\infty} (h - |f_i - f|) d\lambda = \int_E \liminf_{i\to\infty} (h - |f_i - f|) d\lambda \\ \le \liminf_{i\to\infty} \int_E (h - |f_i - f|) d\lambda = \int_E h d\lambda - \limsup_{i\to\infty} \int_E |f_i - f| \, d\lambda\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der reellen Zahl $\int_E h d\lambda$ folgt

$$\limsup_{i\to\infty} \int_E |f_i - f| \, d\lambda \le 0$$

und damit

$$\lim_{i\to\infty} \int_E |f_i - f| \, d\lambda = 0.$$

Nach Satz 2.17 ist für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_E f_i d\lambda - \int_E f d\lambda \right| \le \int_E |f_i - f| \, d\lambda.$$

Es folgt

$$\lim_{i\to\infty}\int_E f_i d\lambda = \int_E f d\lambda.$$

□

Einfache Beispiele zeigen, dass man in Satz 2.19 nicht auf die Existenz der integrierbaren Funktion g verzichten kann.

In der Theorie des Lebesgueschen Maßes, gibt es weitere Konvergenzsätze, die über Konvergenz **fast überall** reden. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel, P eine Eigenschaft, die Elemente von E haben können. Man sagt dann „**fast alle** Elemente von E haben die Eigenschaft P“, wenn die Elemente von E, die nicht die Eigenschaft P haben, eine Nullmenge bilden.

„$f < \infty$ fast überall“ bedeutet zum Beispiel, dass $\{x : f(x) = \infty\}$ eine Nullmenge ist.

Lemma 2.20. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel und $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt*

(1) $|f| < \infty$ *fast überall.*
(2) $\int_E |f|\, d\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$ *fast überall.*
(3) *Ist $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und gilt $f = g$ fast überall, so ist auch g integrierbar und es gilt $\int_E g d\lambda = \int_E f d\lambda$.*

Auf Grund dieses Lemmas kann man auch sinnvoll Funktionen $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ betrachten, die nur fast überall definiert sind. Solch eine Funktion ist messbar (integrierbar), wenn sie fast überall mit einer auf ganz E definierten messbaren (integrierbaren) Funktion übereinstimmt.

Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue erhält man leicht

Korollar 2.21. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel und $f_i : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $i \in \mathbb{N}$. Ferner existiere $\lim_{i\to\infty} f_i(x)$ für fast alle $x \in E$ und es gebe eine integrierbare Funktion $g : E \to [0,\infty]$, so dass für alle $i \in N$ die Ungleichung $|f_i| \leq g$ fast überall gilt.*

Dann sind die f_i integrierbar und es existiert eine integrierbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ fast überall, sowie $\int_E |f_i - f|\, d\lambda \to 0$ und $\int_E f_i d\lambda \to \int_E f d\lambda$ für $i \to \infty$.

2.4. **Der Satz von Fubini.** Für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen stimmt das Lebesguesche Integral dem Riemannschen überein. Daher gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch für das Lebesgueintegral. Insbesondere können die bekannten Integrationsregeln auch für das Lebesgueintegral angewendet werden. Um nun Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ explizit zu integrieren, ist es nötig, mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale zurückzuführen. Das leistet der Satz von Fubini, den wir nach einigen Vorbereitungen beweisen.

Lemma 2.22. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ Borel. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ sei*

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in A\}.$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ sei

$$A^y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\}.$$

Dann sind die Mengen A_x und A^y alle Borel. Außerdem sind die Abbildungen $x \mapsto \lambda(A_x)$ und $y \mapsto \lambda(A^y)$ messbar und es gilt

$$\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(A_x) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda(A_y) d\lambda.$$

Beweis. Dass die Mengen A_x und A^y jeweils Borel sind, rechnet man leicht nach. Dazu benutzt man die Tatsache, dass eine Menge der Form $\{x\} \times B$ genau dann Borel ist, wenn B Borel ist.

Wir zeigen die weiteren Behauptungen zunächst für beschränkte A. Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelmengen von endlichem Maß. Wir betrachten Mengen $A \subseteq E \times F$.

Ist A ein Produkt $B \times C$ von Borelmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $C \subseteq \mathbb{R}^m$, so sind die Behauptungen unmittelbar klar. Mit Lemma 2.15 sieht man, dass die Familie $\mathcal{A}$ der Mengen $A \subseteq E \times F$, die das Lemma erfüllen, unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Aus Lemma 2.17 sowie der Endlichkeit von $\lambda(E)$ und $\lambda(F)$ folgt, dass $\mathcal{A}$ auch unter Komplementen (bezüglich $E \times F$) abgeschlossen ist. Damit umfasst $\mathcal{A}$ alle Borel-Teilmengen von $E \times F$.

Eine Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist, auch wenn sie unbeschränkt ist, Vereinigung über eine aufsteigenden Folge beschränkter Borelmengen. Mit Satz 2.13 und dem bisher Bewiesenem folgt nun die Behauptung des Lemmas für A. □

Korollar 2.23. *Eine Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Menge A_x eine Nullmenge ist.*

Lemma 2.24. *Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F \subseteq \mathbb{R}^m$ Borel. Die Funktion $f : E \times F \to [0, \infty]$ sei messbar. Dann sind die Abbildungen*

$$E \to [0, \infty]; x \mapsto \int_F f(x, \cdot) d\lambda$$

und

$$F \to [0, \infty]; y \mapsto \int_E f(\cdot, y) d\lambda$$

messbar.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass für festes $x \in E$ die Abbildung

$$f_x : F \to [0, \infty]; y \mapsto f(x, y)$$

messbar ist. Sei nämlich $A \subseteq [0, \infty]$ Borel. Wegen der Messbarkeit von f ist $f^{-1}[A]$ Borel. Damit ist auch $f_x^{-1}[A] = (f^{-1}[A])_x$ Borel.

Aus Symmetriegründen ist auch für festes $y \in F$ die Abbildung

$$f_y : F \to [0, \infty]; x \mapsto f(x, y)$$

messbar. Damit sind die Integrale $\int_F f(x, \cdot) d\lambda$ und $\int_E f(\cdot, y) d\lambda$ sinnvoll definiert.

Ist nun f die charakteristische Abbildung χ_A einer Borelmenge $A \subseteq E \times F$, so folgt die Behauptung sofort aus Lemma 2.22. Mit Lemma 2.17 folgt die Behauptung auch für Treppenfunktionen. Mit Hilfe von Satz 2.13 folgt schließlich der allgemeine Fall. □

Satz 2.25 (Satz von Tonelli)**.** *Seien E, F und f wie in Lemma 2.24. Dann gilt*

$$\int_{E\times F} f d\lambda = \int_E \left(\int F f d\lambda^m \right) d\lambda^n = \int_F \left(\int E f d\lambda^n \right) d\lambda^m.$$

Beweis. Lemma 2.22 zeigt den Satz für charakteristische Funktionen von Borelmengen. Den allgemeinen Fall erhält man nun wie in Lemma 2.22. □

Mittels recht einfacher Rechnungen ergibt sich nun

Satz 2.26 (Satz von Fubini)**.** *Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F \subseteq \mathbb{R}^m$ Borel. Die Abbildung $f : E \times F \to \overline{\mathbb{R}}$ sei integrierbar. Dann gilt:*

(1) *Für fast alle $x \in E$ ist $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar. Für fast alle $y \in F$ ist $x \mapsto f(x,y)$ integrierbar.*
(2) *Für $x \in E$ und $y \in F$ sei*

$$I_f(x) = \begin{cases} \int_F f(x,\cdot) d\lambda, & \textit{falls } y \mapsto f(x,y) \textit{ integrierbar ist,} \\ 0 \textit{ sonst} \end{cases}$$

und

$$J_f(y) = \begin{cases} \int_F f(\cdot,y) d\lambda, & \textit{falls } x \mapsto f(x,y) \textit{ integrierbar ist,} \\ 0 \textit{ sonst.} \end{cases}$$

Dann sind I_f und J_f integrierbar mit

$$\int_{E\times F} f d\lambda = \int_E I_f d\lambda = \int_F J_f d\lambda.$$

Aus Satz 2.25 und Satz 2.26 erhalten wir

Korollar 2.27. *Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F \subseteq \mathbb{R}^m$ Borel und $f : E \times F \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Weiter sei $\int_E \left(\int_F |f| \, d\lambda^m\right) d\lambda^n$ oder $\int_F \left(\int_E |f| \, d\lambda^n\right) d\lambda^m$ endlich. Dann gilt*

$$\int_E \left(\int_F f d\lambda^m \right) d\lambda^n = \int_F \left(\int_E f d\lambda^n \right) d\lambda^m,$$

wobei die Integranden eventuell nur fast überall definiert sind.

2.5. **Die Transformationsformel für Integrale.** Die Transformationsformel ist eine Verallgemeinerung der Integration durch Substitution (Kettenregel) auf höhere Dimensionen. Die Transformationen, die uns dabei interessieren, sind Diffeomorphismen.

Definition 2.28. Seien $U, V \subseteq R^n$ offen. Eine stetige Bijektion $\Phi : U \to V$, deren Umkehrung ebenfalls stetig ist, heißt **Homöomorphismus**. Φ heißt **Diffeomorphismus**, falls Φ und Φ^{-1} sogar stetig differenzierbar sind.

Wir beginnen mit einem einfachen Spezialfall.

Lemma 2.29. *Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel. Dann ist $\Phi[E]$ Borel und es gilt $\lambda(\Phi[E]) = |\det(\Phi)| \cdot \lambda(E)$.*

Beweis. Da Φ ein Homöomorphismus ist, ist $\Phi[E]$ Borel. Bekanntlich ist $|\det(\Phi)|$ das Volumen des Bildes des n-dimensionalen Einheitswürfels $[0, 1]^n$ unter der Abbildung Φ. Wegen der Linearität von Φ gilt für jeden abgeschlossenen Quader und jeden offenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\lambda(\Phi[Q]) = |\det(\Phi)| \cdot \lambda(Q).$$

Mittels einer leichten Rechnung folgt, dass die entsprechende Gleichung auch für endliche Vereinigungen von Quadern gilt. Es folgt, dass die Gleichung auch für abzählbare Vereinigungen offener Quader gilt, also für alle offenen Mengen. Da sich Borelmengen bezüglich des Maßes beliebig gut durch offene Mengen approximieren lassen, folgt die Behauptung für beliebige Borelmengen E. □

Korollar 2.30. *Seien Φ und E wie in Lemma 2.31. Weiter sei $f : \Phi[E] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist*

$$\int_{\Phi[E]} f d\lambda = |\det(\Phi)| \cdot \int_E (f \circ \Phi) d\lambda.$$

Beweis. Nach Lemma 2.31 gilt die Behauptung, falls f die charakteristische Funktion einer Borelmenge ist. Daraus folgt aber leicht die Behauptung für Treppenfunktionen und schließlich allgemein für integrierbare Funktionen. □

Das folgende Lemma ist eine nicht-triviale Verallgemeinerung von Lemma 2.31.

Lemma 2.31. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Für jede Borelmenge $E \subseteq U$ ist dann auch $\Phi[E]$ Borel und es gilt*

$$\lambda(\Phi[E]) = \int_E |\det(J_\Phi)| \, d\lambda.$$

Dabei bezeichnet J_Φ die Funktion, die jedem $x \in U$ die Jacobi-Matrix von Φ im Punkt x zuordnet.

Wir beweisen dieses Lemma zusammen mit dem folgenden noch allgemeineren Satz:

Satz 2.32 (Transformationsformel für Integrale)**.** *Seien U, V und Φ wie in Lemma 2.31. Dann ist eine messbare Funkion $f : V \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn $(f \circ \Phi) \cdot |\det(J_\Phi)| : U \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, und in diesem Fall gilt*

$$\int_V f d\lambda = \int_U (f \circ \Phi) \cdot |\det(J_\Phi)| \, d\lambda.$$

Beweis. Lemma 2.31 ist genau Satz 2.32 eingeschränkt auf charakteristische Funktionen f von Borelmengen $E \subseteq U$ zusammen mit der Information, dass $\Phi[E]$ Borel ist, da Φ ein Homöomorphismus ist. Aus Lemma 2.31 folgt leicht der Satz für Treppenfunktionen. Indem man messbare Funktionen als Limiten von aufsteigenden

Folgen von Treppenfunktionen darstellt, folgt der Satz für messbare Funktionen. Daraus folgt schnell der Satz für beliebige integrierbare Funktionen.

Es bleibt also eigentlich nur Lemma 2.31 zu zeigen. Wir werden aber Satz 2.32 gleich mitbeweisen, und zwar durch Induktion über die Dimension n.

Sei zunächst $n = 1$. Ist E ein kompaktes Intervall $[a, b]$, so gilt nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung aus der Riemannschen Integrationstheorie

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \Phi'(x)dx.$$

Beachte, dass $\Phi[E]$ genau das Intervall $[\min(\Phi(a), \Phi(b)), \max(\Phi(a), \Phi(b))]$ ist, denn da Φ ein Homöomorphismus ist, bildet Φ abgeschlossene Intervalle auf abgeschlossene Intervalle und die Randpunkte von Intervallen auf die Randpunkte der Bildintervalle ab. Da der Integrand Φ' stetig sind, folgt für das Lebesguesche Integral die Formel

$$\lambda(\Phi[E]) = \int_E |\Phi'| \, d\lambda.$$

Mit den üblichen Methoden überträgt sich diese Formel auf beliebige Borelmengen E.

Sei nun $n > 1$. Zunächst machen wir uns folgendes klar: Angenommen, Satz 2.32 gilt für die Diffeomorphismen $\Psi : U \to V$ und $\mathrm{P} : V \to W$. Dann ist auch $\Phi = \mathrm{P} \circ \Psi : U \to W$ ein Diffeomorphismus und die Kettenregel zusammen mit dem Determinantenmultiplikationssatz liefert für jede integrierbare Funktion $f : W \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_V f d\lambda = \int_W (f \circ \mathrm{P}) \, |\det(J_\mathrm{P})| \, d\lambda &= \int_U (f \circ \mathrm{P} \circ \Psi) \, |\det(J_\mathrm{P} \circ \Psi)| \cdot |\det(J_\Psi)| \, d\lambda \\ = \int_U (f \circ \Phi) \, |\det((J_\mathrm{P} \circ \Psi) \cdot J_\Psi)| \, d\lambda &= \int_U (f \circ \Phi) \, |\det(J_\Phi)| \, d\lambda.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die Transformationsformel gilt dann auch für Φ.

Wir nehmen nun an, Satz 2.32 gilt in Dimension $n - 1$ und zeigen die Aussage in Dimension n zunächst für Diffeomorphismen Φ, die eine Koordinate festhalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dabei annehmen, dieses sei die erste Koordinate, denn nach Korollar 2.30 gilt die Transformationsformel für Diffeomorphismen, die nur die Koordinatenvertauschen und nach dem oben Gezeigten überträgt sich die Transformationsformel auf Kompositionen von Diffeomorphismen.

Sei also Φ ein Diffeomorphismus, der die erste Koordinate festhält. Schreiben wir die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als (t, x) mit $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, so hat $\Phi(t, x)$ die Form (t, Φ_t), wobei Φ_t ein Diffeomorphismus von $U_t = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x) \in U\}$ nach V_t ist.

Nach Lemma 2.22 gilt für alle Borelmengen $A \subseteq U$ die Gleichung

$$\lambda(\Phi[A]) = \int_\mathbb{R} \lambda((\Phi[A])_t) d\lambda = \int_\mathbb{R} \lambda(\Phi_t[A_t]) d\lambda.$$

Nach Induktionvoraussetzung gilt die Transformationsformel bereits für Φ_t und wir erhalten

$$\lambda(\Phi[A]) = \int_\mathbb{R} \int_{A_t} |\det(J_{\Phi_t})| \, d\lambda^{n-1} d\lambda^1.$$

Da Φ die erste Koordinate festhält, gilt für die Jacobimatrix von Φ

$$J_\Phi((t, x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & J_{\Phi_t}(x) & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\det(J_\Phi(t,x)) = \det(J_{\Phi_t}(x))$. Es folgt

$$\lambda(\Phi[A]) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t} \cdot |\det(J_{\Phi_t})| \, d\lambda^{n-1} \right) d\lambda^1$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \, |\det(J_\Phi)| \, d\lambda = \int_A |\det(J_\Phi)| \, d\lambda.$$

Das zeigt die Transformationsformel für Diffeomorphismen, die eine Koordinate fest lassen.

Für den allgemeinen Fall argumentieren wir wie folgt. Für $x \in U$ schreiben wir $\Phi(x)$ als $(\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$ mit stetig differenzierbaren Abbildungen $\Phi_i : U \to \mathbb{R}$. Sei $p \in U$. Da Φ ein Diffeomorphismus ist, ist mindestens eine der partiellen Ableitungen $\partial\Phi_i/\partial x_j$ im Punkt p von 0 verschieden. Indem wir Φ mit Koordinatenvertauschungen komponieren, können wir annehmen, dass $\partial\Phi_1/\partial x_1$ bei p nicht verschwindet.

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ sei $\Psi(x) = (\Phi_1(x), x_2, \dots, x_n)$. Es gilt

$$J_\Psi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}(x) & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $J_\Psi(p)$ invertierbar. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von Ψ existiert eine offene Umgebung $U(p)$ von p, auf der Ψ ein Diffeomorphismus ist. Damit ist auch $\mathrm{P} = \Phi \circ \Psi^{-1} : \Psi[U(p)] \to \Phi[U(p)]$ ein Diffeomorphismus. Für $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Psi[U(p)]$ gilt $\mathrm{P}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \mathrm{P}_2(y), \dots, \mathrm{P}_n(y))$. Daher halten sowohl Ψ als auch P mindestens eine Koordinate fest. Nach dem oben schon Bewiesenem gilt die Transformationsformel damit auch für $\Phi \restriction U(p) = \mathrm{P} \circ \Psi \restriction U(p)$.

Da p beliebig war, gilt die Transformationsformel für Φ also zumindest lokal. Für jeden Punkt $p \in U$ existieren rationale Zahlen $r_1, \dots, r_n$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $U_{<\frac{1}{m}}((r_1, \dots, r_n)) \subseteq U(p)$. Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ abzählbar sind, gibt es nur abzählbar viele offene Mengen der Form $U_{<\frac{1}{m}}((r_1, \dots, r_n))$. Damit existiert eine Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U(p_i)$. Setze $B_1 = U(p_1)$ und $B_i = U(p_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U(p_j)$ für $i > 1$. Dann sind die B_i paarweise disjunkte Borelmengen, die U überdecken und auf denen jeweils die Transformationsformel für Φ gilt. Es folgt nun leicht mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz, dass die Transformationsformel für Φ auch auf ganz U gilt. □

3. Die klassischen Integralsätze

3.1. Kurven- und Arbeitsintegrale.

Definition 3.1. Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall. Eine stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Weg** (in $\mathbb{R}^n$) mit dem **Parameterbereich** I, $C = \varphi[I]$ ist die von φ erzeugte **Kurve** und φ eine **Parameterdarstellung** (**Parametrisierung**) von C. Die Punkte $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ sind **Anfangs-** und **Endpunkt** des Weges φ. Der Weg φ heißt **Jordansch**, wenn φ injektiv ist, und **geschlossener Jordanscher Weg**, wenn φ auf (a,b) injektiv ist und $\varphi(a) = \varphi(b)$ gilt. Ein Weg φ ist **glatt**, falls φ stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Ableitung ist. φ ist **stückweise glatt**, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Intervalls I gibt, so dass φ auf den Intervallen $[t_{i-1}, t_i]$ glatt ist.

Definition 3.2. Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg, $C = \varphi[[a,b]]$ und $f : C \to \mathbb{R}$ stetig. Das **Kurvenintegral** von f über φ ist die Zahl

$$\int_C f(s)ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\, dt.$$

Dabei ist $\varphi'(t)$ der Vektor $(\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$, wobei die φ_i die Komponentenfunktionen von φ sind. Ist f konstant 1, so erhält man die **Länge** $\int_a^b |\varphi'(t)|\, dt$ von C.

Ist φ nur stückweise glatt, so setzt man das Kurvenintegral $\int_C f(s)ds$ auf die naheliegende Weise aus Integralen über glatte Teilkurven zusammen.

Die Schreibweise $\int_C f(s)ds$ deutet bereits an, dass das Integral von der Parametrisierung φ der Kurve C unabhängig ist.

Lemma 3.3. *Seien $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ glatte, injektive Parametrisierungen derselben Kurve C mit $\varphi(a) = \psi(c)$ und $\varphi(b) = \psi(d)$. Weiter sei $f : C \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_c^d f(\psi(t)) \cdot |\psi'(t)|\, dt.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst $n = 1$ an. In diesem Falle sieht man leicht, dass die Abbildung $\psi^{-1} \circ \varphi : [a,b] \to [c,d]$ ein Diffeomorphismus ist. Kettenregel und Transformationsformel liefern

$$\int_{[c,d]} (f \circ \psi) \cdot |\psi'|\, d\lambda = \int_{[a,b]} (f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi) \cdot |\psi' \circ \psi^{-1} \circ \varphi| \cdot |(\psi^{-1} \circ \varphi)'|\, d\lambda$$
$$= \int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \cdot |\varphi'|\, d\lambda.$$

Die Behauptung folgt nun mittels einer einfachen Vorzeichenbetrachtung.

Der Fall $n > 1$ lässt sich auf den Fall $n = 1$ zurückführen, dass ist aber etwas aufwendiger. $\square$

Definition 3.4. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $K : S \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld. $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist ein **Potential** zu K, falls für alle $s \in S$ gilt: $\operatorname{grad} V(s) = K(s)$

Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg, $C = \varphi[[a,b]]$ und $K : C \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges **Vektorfeld**. Das **Arbeitsintegral** von K entlang φ ist die Zahl

$$\int_\varphi \langle K(s), ds \rangle = \int_a^b \langle K(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt.$$

Für stückweise glattes φ ist die Definition des Arbeitsintegrals wieder die naheliegende.

Das Arbeitsintegral von K entlang φ kann interpretiert werden als die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um ein punktförmiges Objekt, auf das im Punkt x die Kraft K wirkt, entlang φ zu bewegen.

Lemma 3.5. *Sei $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld. K besitzt genau dann ein Potential, wenn der Wert von Arbeitsintegralen von K entlang eines Weges φ nur von den Endpunkten von φ abhängt. Man sagt in diesem Fall, dass die Arbeitsintegrale* **wegunabhängig** *sind.*

Beweis. Ist $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Potential von K, so gilt

$$\int_a^b \langle K(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle dt = \int_a^b \langle \operatorname{grad} V(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle dt$$
$$= \int_a^b (V \circ \varphi)' dt = V(\varphi(b)) - V(\varphi(a)).$$

Der letzte Ausdruck hängt offenbar nur von den Endpunkten von φ ab.

Sind umgekehrt Arbeitsintegrale von K wegunabhängig, so kann man ein Potential $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leicht wie folgt definieren: Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\varphi_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg mit $\varphi_x(0) = 0$ und $\varphi_x(1) = x$. Setze $V(x) = \int_{\varphi_x} \langle K(s), ds\rangle$.

Wir bestimmen nun $\partial V/\partial x_i(x)$. Für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ sei $\varphi : [0, b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg mit $\varphi(a) = x$, $\varphi_i'(a) = 1$ und $\varphi_j'(a) = 0$ für $j \neq i$. Dann gilt

$$\partial V/\partial x_i(a) = (V \circ \varphi)'(a) = \frac{d}{dy}\left(\int_0^y \langle K(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle dt\right)(a)$$
$$= \langle K(\varphi(a)), \varphi'(a)\rangle = K_i(\varphi(a)),$$

wobei K_i die i-te Komponentenfunktion von K ist. $\square$

3.2. **Flächen- und Flußintegrale.**

Definition 3.6. $N \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich**, falls es $a < b$ und stetige Funktionen $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha \leq \beta$ gibt, so dass

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

gilt.

Definition 3.7. Sei $N \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich. Eine **glatte Fläche** in $\mathbb{R}^n$ mit **Parameterbereich** N ist eine stetig differenzierbaren Abbildung $\Phi : N \to \mathbb{R}^n$, so dass $J_\Phi(x)$ für alle $x \in N$ den Rang 2 hat. Φ ist die **Parameterdarstellung** (**Parametrisierung**) des **Flächenstücks** $F = \Phi[N]$.

Definition 3.8. Sei $\Phi : N \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche, $F = \Phi[N]$ und $f : F \to \mathbb{R}$ stetig. Das **Flächenintegral** von f über F ist die Zahl

$$\int_\Phi f(\omega) d\omega = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (f \circ \Phi)(x, y) \left|\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)(x, y)\right| dy\right) dx.$$

Dabei bezeichnet $\times$ das Vektorprodukt zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$. a, b und α, β beschreiben wie in Definition 3.6 den Normalbereich N.

Das Flächenintegral von 1 über F ist der **Flächeninhalt** von F.

Man beachte: Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ steht $u \times v$ senkrecht auf u und v und $|u \times v|$ ist die Fläche des von u und v aufgespannten Parallelogramms.

Für glatte injektive Flächen sind Flächenintegrale unabhängig von der Parametrisierung der Fläche. Das kann man mit Hilfe der Transformationsformel für Integrale beweisen.

Definition 3.9. Sei $\Phi : N \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche, $F = \Phi[K]$ und $f : F \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Das **Flussintegral** von f über Φ ist die Zahl

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left\langle (f \circ \Phi)(x,y), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)(x,y) \right\rangle dy \right) dx.$$

Flussintegrale lassen sich wie folgt interpretieren: Angenommen, für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ ist $f(x)$ der Geschwindigkeitsvektor eines im Punkt x befindlichen Gasmoleküls. Dann gibt das Flussintegral von f über Φ an, wieviel Gas durch die Fläche F hindurchströmt.

3.3. **Volumenintegrale.**

Definition 3.10. Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Normalgebiet**, wenn es einen Normalbereich $N \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetige Abbildungen $\gamma, \delta : N \to \mathbb{R}$ mit

$$G = \{(x,y,z) : (x,y) \in N \wedge \gamma(x,y) \leq z \leq \delta(x,y)\}$$

gibt.

Definition 3.11. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Normalgebiet. Ein **glattes Volumen** mit **Parameterbereich** G ist eine stetig differenzierbare Abbildung $V : G \to \mathbb{R}^3$, deren Jacobimatrizen überall invertierbar sind.

Definition 3.12. Sei $V : G \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Volumen, $G_0 = V[G]$ und $f : G_0 \to \mathbb{R}$ stetig. Das **Volumenintegral** von f über G_0 ist die Zahl

$$\int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} (f \circ V) \left|\det(J_V(x,y,z))\right| dz dy dx.$$

Dabei seien $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Daten, die das Normalgebiet G beschreiben.

Mit Hilfe der Kettenregel und der Transformationsformel lässt sich leicht nachrechnen, dass Volumenintegrale für injektive glatte Volumina von der Parametrisierung des Volumens unabhängig sind.

Eine typische Anwendung eines Volumenintegrals ist die Berechnung der Masse eines festen Körpers bei gegebener Dichteverteilung.

3.4. **Die Sätze von Gauß und Stokes.**

Definition 3.13. a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $g : U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Die **Divergenz** von g ist die Funktion

$$\operatorname{div} g : U \to \mathbb{R}; (x,y,z) \mapsto \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}\right)(x,y,z).$$

Dabei bezeichnen g_1, g_2, g_3 wie üblich die Komponentenfunktionen von g.

b) Sei g wie oben. Die **Rotation** von g ist die Abbildung

$$\operatorname{rot} g : U \to \mathbb{R}^3; (x,y,z) \mapsto \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)(x,y,z).$$

Die Operatoren div und rot sind sogenannte **Differentialoperatoren**. Die einfachsten Differentialoperatoren sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Lemma 3.14. *a)* $\operatorname{div} g = \langle \nabla, g\rangle$

b) $\operatorname{rot} g = \nabla \times g$

c) Ist $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *stetig differenzierbar, so gilt* $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

d) Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar, so setzt man* $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$. Δ *ist der* **Laplaceoperator**. *Es gilt*

$$\Delta f(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(x,y,z).$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen, wobei für c) der Satz von Schwarz benutzt wird. □

3.4.1. *Der Satz von Gauß in der Ebene.* Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $g : U \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Die Divergenz von g wird in Analogie zu dreidimensionalen Fall als $\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}$ definiert.

Einen Normalbereich $N \subseteq \mathbb{R}^2$ wie in Definition 3.6 nennen wir im Folgenden **Normalbereich bezüglich der x-Achse**. Ein **Normalbereich bezüglich der y-Achse** ist eine Menge, deren Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden (Koordinatenvertauschung) ein Normalbereich bezüglich der x-Achse ist.

Ist $N \subseteq \mathbb{R}^2$ ein durch $a, b \in \mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Abbildungen $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha \leq \beta$ bestimmtes Normalgebiet bezüglich der x-Achse, so definiert man den **Rand** ∂N als die Kurve, die von dem stückweise glatten Weg erzeugt wird, der durch Hintereinanderhängen der Wege

$$\varphi^1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (t, \alpha(t)),$$

$$\varphi^2 : [\alpha(b), \beta(b)] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (b,t),$$

$$\varphi^3 : [0, b-a] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (b-t, \beta(b-t))$$

und

$$\varphi^4 : [0, \beta(a) - \alpha(a)] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (a, \beta(a) - t)$$

entsteht. Das Intervall $[c,d]$ sei der Definitionsbereich von φ.

Dabei kommt es auf die Parametrisierung von ∂N eigentlich nicht an. Wichtig ist nur, dass die Parametrisierung stückweise glatt ist, der Anfangs- mit dem Endpunkt übereinstimmt, die Parametrisierung ansonsten aber injektiv ist und ∂N so durchlaufen wird, dass N immer zur Linken liegt. An jeder Stelle $t \in [c,d]$ sei $\nu(t)$ der Vektor der Länge 1, der im Punkte (x,y) senkrecht auf der Tangente an die Kurve ∂N steht und nach außen, also von N weg zeigt.

Beachte, dass $\nu(t)$ an endlich vielen Ausnahmestellen in $[c,d]$ nicht definiert ist. Das macht aber nichts, da es sich um eine Nullmenge handelt. Es gilt nun folgender Satz:

Satz 3.15 (Satz von Gauß in der Ebene)**.** *Sei N ein Normalbereich sowohl bezüglich der x-Achse als auch bezüglich der y-Achse. Der Rand ∂N sei eine stückweise glatte Kurve. Weiter sei $g : N \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\int_{\partial N} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \operatorname{div} g dy dx.$$

Beweis. Wir zeigen den Satz zunächst für Vektorfelder g der Form $(x, y) \mapsto (0, g_2(x, y))$. Wir parametrisieren ∂N wie oben durch $\varphi^1, \dot{;}\varphi^4$. Da alle Vektoren im Bild von g parallel zur y-Achse sind, verschwinden die Wegintegrale $\int_{\varphi^2}\langle g(s), \nu(s)\rangle ds$ und $\int_{\varphi^4}\langle g(s), \nu(s)\rangle ds$. Damit ist

$$\int_{\partial N} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds = \int_{\varphi^1} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds + \int_{\varphi^3} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds.$$

Sei $\varphi = \varphi^1$ und

$$\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (t, \alpha(t)).$$

Das heißt, ψ parametrisiert dieselbe Kurve wie φ^3, die Kurve wird aber in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen. Daher gilt

$$\int_{\varphi^3} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds = -\int_{\psi} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds.$$

Für $t \in [a, b]$ gilt

$$\langle g(\varphi(t)), \nu(t)\rangle \cdot |\varphi'(t)| = \langle g(\varphi(t)), (-\varphi_2'(t), \varphi_1'(t))\rangle,$$

wobei $\nu(t)$ der Normalenvektor bezüglich des Weges φ ist und φ_1 und φ_2 die Komponentenfunktionen von φ sind. Wegen der speziellen Form von g erhält man

$$\langle g(\varphi(t)), \nu(t)\rangle \cdot |\varphi'(t)| = g_2(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) = -g_2(t, \alpha(t)).$$

Entsprechendes gilt für ψ.

Insgesamt ergibt sich

$$\int_{\partial N} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds = \int_a^b (g_2(t, \beta(t)) - g_2(t, \alpha(t)))dt$$

Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist für jedes $t \in [a, b]$

$$g_2(t, \beta(t)) - g_2(t, \alpha(t)) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial g_2}{\partial y}(t, y)dy.$$

Es folgt

$$\int_{\partial N} \langle g(s), \nu(s)\rangle ds = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y)dy dx = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \operatorname{div} g dy dx,$$

da $\partial g_1/\partial x = 0$ ist.

Vollkommen analog erhält man den Satz für Normalbereiche bezüglich der y-Achse und Vektorfelder, deren zweite Komponente verschwindet. Ist $g : N \to \mathbb{R}^2$ nun ein beliebiges Vektorfeld, so lässt sich g schreiben als Summe zweier Vektorfelder bei denen jeweils eine der Komponenten verschwindet. Wenn N Normalbereich bezüglich der x- und der y-Achse ist, so gilt die Konklusion des Gaußschen Satzes für die beiden Vektorfelder, in die wir g zerlegt haben. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Behauptung auch für g selbst gilt. □

Der Satz von Gauß in der Ebene gilt für viel allgemeinere Mengen als Normalbereiche bezüglich beider Achsen. Man sieht zum Beispiel leicht, dass der Satz auch für Mengen gilt die sich sowohl in endlich viele Normalbereiche der x-Achse als auch in endlich viele Normalbereiche bezüglich der y-Achse mit glattem Rand zerlegen lassen. Der Satz gilt auch für die Kreisscheibe oder ähnliche Mengen.

3.4.2. *Der Satz von Gauß im Raum.*

Definition 3.16. a) Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **z-Gebiet**, wenn G die Form

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in N \wedge \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\}$$

hat, wobei N ein Normalbereich in der Ebene mit stückweise glattem Rand ∂N ist und $\gamma, \delta : N \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $\gamma \leq \delta$ sind. Analog werden **x-Gebiete** und **y-Gebiete** erklärt.

b) Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Gaußgebiet**, wenn G sowohl in endlich viele x-Gebiete als auch in endlich viele y-Gebiete als auch in endlich viele z-Gebiete zerlegt werden kann.

Man beachte, dass z-Gebiete Normalgebiete sind.

Für ein Gaußgebiet G_0 sei ∂G_0 der **Rand** von G_0, also G_0 ohne das offene Innere von G_0. Wie man leicht sieht, ist ∂G_0 eine Vereinigung von endlich vielen glatten Flächen, die sich nur an ihren zweidimensionalen Rändern schneiden. Daher kann man Flussintegrale

$$\int_{\partial G_0} \langle f(\omega), n(\omega) \rangle d\omega$$

über ∂G_0 berechnen, in dem man auf jedem glatten Teil von G_0 das Flussintegral von f gemäß Definition 3.9 berechnet und diese Flussintegrale einfach aufaddiert. Dabei sei $n(\omega)$ immer der nach außen (von dem Inneren von G_0 weg) zeigende Normalenvektor. Anders ausgedrückt, man wählt die Parametrisierungen Φ der glatten Flächenstücke von ∂G_0 so, dass die im Flussintegral auftretenden Vektoren $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ jeweils nach außen zeigen.

Analog kann man Volumenintegrale

$$\int_{G_0} f(x, y, z) dz dy dx$$

über G_0 berechnen, indem man zunächst G_0 in endlich viele Normalgebiete zerlegt, auf jedem Normalbereich N das Volumenintegral von f über N gemäß Definition 3.12 berechnet und dann diese Volumenintegrale aufaddiert.

Satz 3.17 (Satz von Gauß im Raum)**.** *Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem Gaußgebiet G_0. Dann ist*

$$\int_{\partial G_0} \langle f(\omega), n(\omega) \rangle d\omega = \int_{G_0} (\operatorname{div} f)(x, y, z).$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für Mengen $G_0 \subseteq \mathbb{R}^3$, die z-Gebiete sind und für Vektorfelder, bei denen die ersten beiden Komponenten verschwinden. Für Mengen, die sich in endlich viele z-Gebiete zerlegen lassen, und Vektorfelder, bei denen die ersten beiden Komponenten verschwinden, folgt der Satz dann aus der Tatsache, dass sich für zwei z-Gebiete, die ein Flächenstück am Rand gemeinsam haben, die beiden Flussintegrale, die für dieses Flächenstück auftreten, wenn man den Satz für beide Gebiete anwendet und einfach die entsprechenden Seiten der Gleichung addiert, genau aufheben.

Analog gilt der Satz, falls G_0 sich in endlich viele x-Gebiete, beziehungsweise in endlich viele y-Gebiete zerlegen lässt und die letzten beiden beziehungsweise die erste und letzte Komponente des Vektorfeldes verschwinden.

Allgemeine Vektorfelder zerlegt man zunächst in drei Vektorfelder, bei denen jeweils zwei Komponenten verschwinden. Für Gaußgebiete G_0 gilt der Satz nun für jedes dieser drei Vektorfelder. Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Satz dann auch für die Summe der drei Vektorfelder gilt.

Sei also $G_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ ein z-Gebiet und f ein Vektorfeld der Form $(x, y, z) \mapsto (0, 0, f_3(x, y, z))$. Sei N ein Normalbereich in der Ebene mit glattem Rand, der durch $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha \leq \beta$ gegeben ist, so dass G_0 durch N und die stetig differenzierbaren Abbildungen $\gamma, \delta : N \to \mathbb{R}$ mit $\gamma \leq \delta$ gegeben ist.

Der Mantel von G_0, also die Vereinigung der Flächenstücke, die aus Punkten $(x, y, z) \in \partial G_0$ mit $(x, y) \in \partial N$ bestehen, trägt nichts zum Flussintegral über ∂G_0 bei, da hier die Normalenvektoren in der (x, y)-Ebene liegen und damit senkrecht auf den Vektoren des Vektorfeldes f stehen.

Für alle $(x, y) \in N$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} (\operatorname{div} f)(x, y, z)dz &= \int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)(x, y, z)dz \\ &= \int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)dz = f_3(x, y, \delta(x, y)) - f_3(x, y, \gamma(x, y)).\end{aligned}$$

Wir parametrisieren den „Deckel“ $\{(x, y, \delta(x, y)) : (x, y) \in N\}$ auf die naheliegende Weise mittels der Abbildung

$$\Phi : N \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x, y, \delta(x, y)).$$

Für jeden Punkt $(x, y) \in N$ ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(1, 0, \frac{\partial \delta}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial \delta}{\partial y}\right).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}&\left\langle f(\Phi(x, y)), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)(x, y)\right\rangle \\ &\quad = \left\langle (0, 0, f_3(x, y, \delta(x, y))), \left(1, 0, \frac{\partial \delta}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial \delta}{\partial y}\right)\right\rangle \\ &\quad = f_3(x, y, \delta(x, y)).\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die naheliegende Parametrisierung Ψ des „Bodens“ $\{(x, y, \gamma(x, y)) : (x, y) \in N\}$ die Formel

$$\left\langle f(\Psi(x, y)), \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)(x, y)\right\rangle = -f_3(x, y, \gamma(x, y)).$$

Das negative Vorzeichen entsteht dadurch, dass wir Ψ so wählen müssen, dass $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)(x, y)$ jeweils nach außen, also in diesem Fall nach unten zeigt.

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_{\partial G_0} \langle f(\omega), n(\omega)\rangle d\omega \\ &\quad = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (f_3(x, y, \delta(x, y)) - f_3(x, y, \gamma(x, y)))dydx \\ &\quad = \int_{G_0} (\operatorname{div} f)(x, y, z),\end{aligned}$$

was wir zeigen wollten. □

3.4.3. *Der Satz von Stokes.*

Definition 3.18. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in endlich viele Normalbereiche bezüglich der x-Achse und in endlich viele Normalbereiche bezüglich der y-Achse mit jeweils glattem Rand zerlegbar. Ist $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ injektiv, zweimal stetig differenzierbar und haben alle Jacobimatrizen von Φ den Rang 2, so heißt Φ eine **Stokesfläche**. Der Einfachheit halber werden wir auch $\Phi[D]$ eine Stokesfläche nennen. Die $\Phi[D]$ berandende Kurve $\partial\Phi[D]$ ist die Menge $\Phi[\partial D]$.

Der Satz von Stokes besagt, dass das Flussintegral der Rotation eines Vektorfeldes über eine Stokesfläche gleich dem Arbeitsintegral des Vektorfeldes über die die Stokesfläche berandende Kurve ist. Hierbei sind gewisse Orientierungen zu berücksichtigen.

Satz 3.19 (Satz von Stokes)**.** *Sei $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ eine Stokesfläche und $f : \Phi[D] \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_{\partial\Phi[D]} \langle f(s), ds\rangle = \int_{\Phi[D]} \langle \operatorname{rot} f(\omega), \nu(\omega)\rangle d\omega.$$

Dabei zeigen die Normalenvektoren $\nu(\omega)$ in Richtung des Daumens der rechten Hand, wenn ∂D in Richtung der Finger der rechten Faust durchlaufen wird.

Beweis. Wir führen den Satz von Stokes auf den Satz von Gauß in der Ebene zurück. Sei zunächst f ein Vektorfeld, bei dem alle bis auf eine Komponente verschwinden. Wir nehmen an, dass der ersten beiden Komponenten verschwinden. Der Fälle, dass die erste und letzte beziehungsweise die beiden letzten Komponenten, lassen sich vollkommen analog behandeln.

Um die Notation etwas kompakter zu gestalten, schreiben wir im Folgenden Φ_{1x} für $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}$, Φ_{3y} für $\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}$ und so weiter. Dabei steht (x, y) immer für einen Punkt aus D. Entsprechend schreiben wir f_{31} für $\frac{\partial f_3}{\partial x_1}$ und so weiter. Dabei steht (x_1, x_2, x_3) immer für einen Punkt in $\Phi[D]$. Für $x, y \in D$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\operatorname{rot} f)(\Phi(x,y)), \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)(x,y)\right\rangle \\
&= \langle (f_{32}, -f_{31}, 0)\,(\Phi(x,y)), (\Phi_{2x}\cdot\Phi_{3y} - \Phi_{2y}\cdot\Phi_{3x}, \Phi_{3x}\cdot\Phi_{1y} - \Phi_{3y}\cdot\Phi_{1x}, *)\,(x,y)\rangle \\
&= f_{32}(\Phi_{2x}\Phi_{3y} - \Phi_{2y}\Phi_{3x}) - f_{31}(\Phi_{3x}\Phi_{1y} - \Phi_{3y}\Phi_{1x}) = (f_{31}\Phi_{1y} + f_{32}\Phi_{2y})\cdot(\Phi_{3y} - \Phi_{3x}).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}((f_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3y}, -(f_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3x}) \\
&\quad = \frac{\partial(f_3\circ\Phi)}{\partial x}\cdot\Phi_{3y} + (f_3\circ\Phi)\cdot\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y\partial x} - \frac{\partial(f_3\circ\Phi)}{\partial y}\cdot\Phi_{3x} - (f_3\circ\Phi)\cdot\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial y} \\
&\quad = \frac{\partial(f_3\circ\Phi)}{\partial x}\cdot\Phi_{3y} - \frac{\partial(f_3\circ\Phi)}{\partial y}\cdot\Phi_{3x}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\partial(f_3\circ\Phi)}{\partial x} = \left\langle \operatorname{grad} f_3, \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\rangle = f_{31}\Phi_{1x} + f_{32}\Phi_{2x} + f_{33}\Phi_{3x}$$

und

$$\frac{\partial(f_3\circ\Phi)}{\partial y} = f_{31}\Phi_{1y} + f_{32}\Phi_{2y} + f_{33}\Phi_{3y}$$

folgt

$$\operatorname{div}((f_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3y}, -(f_3\circ\Phi)\cdot\Phi_{3x}) = (f_{31}\Phi_{1x} + f_{32}\Phi_{2x})\cdot(\Phi_{3y} - \Phi_{3x}).$$

Mit anderen Worten: Das Flussintegral der Rotation von f über $\Phi[D]$ ist gleich dem Flächenintegral der Divergenz des Vektorfeldes

$$g : D \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto (f_3(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_{3y}(x,y), -f_3(\Phi(x,y)) \cdot \Phi_{3x}(x,y))$$

über D, also

$$\int_{\Phi[D]} \langle \operatorname{rot} f(\omega), \nu(\omega) \rangle d\omega = \int_D \operatorname{div} g(\omega) d\omega.$$

Sei nun $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stückweise glatte Parametrisierung von ∂D, wobei D entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen wird. Das Flussintegral von g über ∂D ist dann

$$\int_{\partial D} \langle g(s), \nu(s) \rangle ds = \int_a^b \langle g(\varphi(t)), (\varphi_2'(t), -\varphi_1'(t)) \rangle dt$$
$$= \int_a^b (f_3(\Phi(\varphi(t))) \cdot \Phi_{3y}(\varphi(t)) \cdot \varphi_2'(t) + f_3(\Phi(\varphi(t))) \cdot \Phi_{3x}(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t))\, dt$$
$$= \int_a^b f_3(\Phi(\varphi(t))) \cdot \langle (\operatorname{grad} \Phi_3)(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b f_3(\Phi(\varphi(t))) \cdot (\Phi_3 \circ \varphi)'(t) dt$$
$$= \int_{\partial \Phi[D]} \langle f(s), ds \rangle$$

Nach dem Satz von Gauß in der Ebene ist

$$\int_{\partial D} \langle g(s), \nu(s) \rangle ds = \int_D \operatorname{div} g(\omega) d\omega.$$

Es folgt der Satz von Stokes für $\Phi[D]$ und f.

Dieselben Argumente zeigen den Satz für Vektorfelder, bei denen die erste und dritte beziehungsweise die zweite und dritte Komponente verschwinden. Der allgemeine Fall ergibt sich wieder durch Zerlegung eines gegebenen Vektorfeldes in drei Vektorfelder, bei denen jeweils zwei Komponenten verschwinden. $\square$